EPL - SESSION 1998
CORRIGÉ

Électrocinétique.

1. Par définition la puissance moyenne fournie par la source idéale de courant au circuit est $\mathcal{P} = \frac{1}{2}\Re\mathrm{e}\{\underline{u}.\underline{i}^*\}$ où $\underline{u}$ et $\underline{i}$ sont liés par la relation :

$$\underline{i} = \sqrt{2}\,\mathrm{I}_0 \exp(\mathrm{j}\omega t) = \underline{Y}\,\underline{u} = \left[\frac{1}{\mathrm{R}} + \mathrm{j}\left(\mathrm{C}\omega - \frac{1}{\mathrm{L}\omega}\right)\right]\underline{u}$$

avec $\underline{Y}$ admittance complexe du circuit.
Il en résulte que :

$$\mathcal{P} = \frac{\mathrm{RI}_0^2}{1 + \mathrm{R}^2\left(\mathrm{C}\omega - \frac{1}{\mathrm{L}\omega}\right)^2}$$

La fonction $f(\omega) = 1 + \mathrm{R}^2\left(\mathrm{C}\omega - \frac{1}{\mathrm{L}\omega}\right)^2$, telle que $\frac{\mathrm{C}\omega}{\mathrm{L}\omega} = \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{L}} = \mathrm{Cte}$, passe par un minimum pour $\omega = \omega_0$ telle que $\mathrm{C}\omega_0 = \frac{1}{\mathrm{L}\omega_0}$. Il en résulte que la puissance moyenne est maximale pour :

$$\boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{LC}}}}$$

et vaut $\mathcal{P}_{max} = \mathrm{RI}_0^2$.

Remarque. Une simple analyse dimensionnelle montre que, parmi les résultats proposés, seul $\frac{1}{\sqrt{\mathrm{LC}}}$ est homogène à l'inverse d'un temps.

2. Si on pose $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ alors on peut écrire $\mathcal{P} = \frac{\mathcal{P}_{max}}{1 + \mathrm{Q}^2\left(x - \frac{1}{x}\right)^2}$ à condition que :

$$\boxed{\mathcal{P}_{max} = \mathrm{RI}_0^2 \quad , \quad \mathrm{Q} = \mathrm{RC}\omega_0 = \frac{\mathrm{R}}{\mathrm{L}\omega_0}}$$

Notons que Q, facteur de qualité du circuit, est sans dimension ce qui élimine directement le résultat a).

3. On a $\mathcal{P} = \frac{1}{2}\mathcal{P}_{max}$ quand $\mathrm{Q}^2\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = 1$ ce qui nous conduit aux solutions x_1 et x_2 telles que :

$$x_1 - \frac{1}{x_1} = -\frac{1}{\mathrm{Q}} \quad , \quad x_2 - \frac{1}{x_2} = \frac{1}{\mathrm{Q}}$$

Par addition on obtient $(x_1 + x_2)\left(1 - \frac{1}{x_1 x_2}\right) = 0$ d'où $x_1 x_2 = 1$.

Par soustraction il vient $(x_2 - x_1)\left(1 + \frac{1}{x_1 x_2}\right) = \frac{2}{\mathrm{Q}}$ d'où $x_2 - x_1 = \frac{1}{\mathrm{Q}}$.

On en déduit la bande passante :

$$\boxed{\Delta\omega = |\omega_1 - \omega_2| = \frac{\omega_0}{\mathrm{Q}}}$$

d'autant plus étroite que le facteur de qualité est grand.

4. La tension efficace aux bornes du générateur est aussi celle aux bornes du résistor de résistance R, soit $U = \dfrac{RI_0}{\sqrt{1+Q^2\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2}}$, dont la valeur maximale - résonance en tension - obtenue pour x = 1 vaut :

$$\boxed{U_{max} = RI_0}$$

5. L'intensité efficace du courant qui circule dans le condensateur est $I_C = C\omega U$ soit :

$$\boxed{I_C = \frac{xQI_0}{\sqrt{1+Q^2\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2}}}$$

6. On peut écrire $\dfrac{I_C}{I_0} = \dfrac{1}{\sqrt{f(X)}}$ avec $f(X) = X^4 - 2\left(1-\dfrac{1}{2Q^2}\right)X^2 + 1$ si on pose $X = \dfrac{1}{x}$.

On observe aisément que f(X) passe par un minimum pour $X = \sqrt{1-\dfrac{1}{2Q^2}}$ si $Q > \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Ainsi I_C passe par un maximum pour :

$$\boxed{Q > \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ et } x = \frac{Q\sqrt{2}}{\sqrt{2Q^2-1}}}$$

7. La valeur maximale de cette intensité est :

$$\boxed{I_{Cmax} = \frac{2Q^2 I_0}{\sqrt{4Q^2-1}}}$$

Cette surintensité est susceptible de conduire à la destruction du composant.

Optique géométrique.

8. Un rayon incident parallèle à l'axe optique émerge en restant parallèle à cet axe donc le système optique est afocal.

9. Ce système impose que $-\infty \xrightarrow{\mathcal{L}_1} F_{i1}$ et $F_{o3} \xrightarrow{\mathcal{L}_3} +\infty$ ce qui implique $F_{i1} \xrightarrow{\mathcal{L}_2} F_{o3}$: les foyers image de $\mathcal{L}_1$ et objet de $\mathcal{L}_3$ sont conjugués à travers $\mathcal{L}_2$.

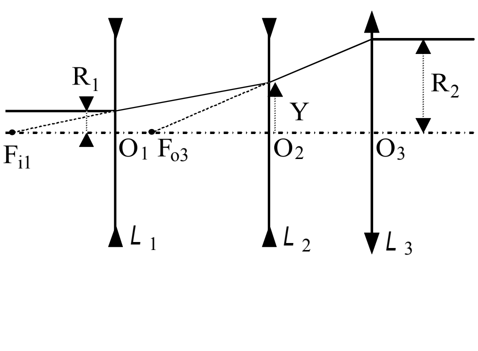
10. Avec la formule de conjugaison des Descartes le résultat précédent se traduit par :

$$-\frac{1}{\overline{O_2F_{i1}}} + \frac{1}{\overline{O_2F_{o3}}} = \frac{1}{f_2}$$

avec $\overline{O_2F_{i1}} = \overline{O_2O_1} + \overline{O_1F_{i1}} = -a + f_1$ et $\overline{O_2F_{o3}} = \overline{O_2O_3} + \overline{O_3F_{o3}} = b - f_3$, d'où on déduit :

$$\boxed{\frac{1}{b-f_3} - \frac{1}{f_1-a} = \frac{1}{f_2}}$$

11. Les triangles homothétiques de sommet F_{i1} nous donnent $\dfrac{Y}{R_1} = \dfrac{\overline{O_2F_{i1}}}{\overline{O_1F_{i1}}} = \dfrac{f_1-a}{f_1}$ et ceux de sommet F_{o3} conduisent à $\dfrac{Y}{R_2} = \dfrac{\overline{O_2F_{o3}}}{\overline{O_3F_{o3}}} = \dfrac{b-f_3}{-f_3}$.



De ces deux relations on déduit :

$$\boxed{\frac{R_2}{R_1}=\frac{f_3}{f_1}\cdot\frac{f_1-a}{f_3-b}}$$

12. D'après la question 10 on a $\frac{1}{f_3-b}=-\frac{1}{f_2}-\frac{1}{f_1-a}$ donc $\frac{f_1}{f_3}\frac{R_2}{R_1}=-\frac{f_1-a}{f_2}-1$ d'où on tire :

$$\boxed{a=f_1+f_2\left(1+\frac{f_1}{f_3}\frac{R_2}{R_1}\right)}$$

13. Toujours d'après la question 10 on a $\frac{1}{f_1-a}=-\frac{1}{f_2}-\frac{1}{f_3-b}$ donc $\frac{f_3}{f_1}\frac{R_1}{R_2}=-\frac{f_3-b}{f_2}-1$ d'où on tire :

$$\boxed{b=f_3+f_2\left(1+\frac{f_3}{f_1}\frac{R_1}{R_2}\right)}$$

14. On a $d=\overline{O_1O_3}=a+b$ soit avec les résultats précédents :

$$\boxed{d=f_1+f_3+f_2\left(2+\frac{f_1}{f_3}\frac{R_2}{R_1}+\frac{f_3}{f_1}\frac{R_1}{R_2}\right)=19\text{cm}}$$

Électrocinétique.

15. Pour déterminer l'impédance du générateur de Thévenin équivalent on court-circuite le générateur de tension idéal ; il ne reste donc, entre A et B, que R en parallèle avec C, d'où :

$$\boxed{\underline{Z}_{th}=\frac{R}{1+jCR\omega}}$$

Pour déterminer la f.é.m. du générateur de Thévenin équivalent on applique le théorème de Millman en A, d'où :

$$\boxed{\underline{E}_{th}=\frac{\underline{E}}{1+jCR\omega}}$$

16. A vide la fonction de transfert du quadripôle - quadripôle en "Π" ou "triangle" - est :

$$\boxed{\underline{T}(j\omega)=\frac{\underline{V}}{\underline{E}}=\frac{\underline{E}_{th}}{\underline{E}}=\frac{1}{1+jCR\omega}}$$

C'est une fonction de transfert du premier ordre fondamental dont la pulsation de coupure, à −3dB, est :

$$\boxed{\omega_0=\frac{1}{RC}}$$

17. Si on met en sortie une charge purement résistive alors, en utilisant le diviseur de tension, on a $\underline{V}'=\frac{R\underline{E}_{th}}{R+\underline{Z}_{th}}$ ce qui nous conduit à :

$$\boxed{\underline{T}'(j\omega)=\frac{\underline{V}'}{\underline{E}}=\frac{1}{2+jCR\omega},\omega'_0=2\omega_0=\frac{2}{RC}}$$

18. L'impédance complexe d'entrée du filtre chargé est définie par $\underline{Z}_e=\frac{\underline{E}}{\underline{I}}=\frac{\frac{1}{jC\omega}\left(R+\underline{Z}_{//}\right)}{R+\underline{Z}_{//}+\frac{1}{jC\omega}}$ avec

$\underline{Z}_{//}=\frac{1}{\underline{Y}_{//}}=\frac{1}{\frac{1}{R}+jC\omega}$ ce qui nous donne :

$$\boxed{\underline{Z}_e = \frac{R(2 + jCR\omega)}{1 + 3jCR\omega - (CR\omega)^2}}$$

19. Pour $\omega = \omega'_0 = \dfrac{2}{RC}$ il vient :

$$\underline{Z}_e(\omega'_0) = \frac{2R}{15}(1 - 3j) = \frac{2R}{15} + \frac{2R}{5j} = \frac{2R}{15} + \frac{4}{5jC\omega'_0}$$

Dans ce cas le filtre chargé est équivalent, du point de vue de l'impédance d'entrée, à un dipôle R_1C_1 série tel que :

$$\boxed{R_1 = \frac{2R}{15} \quad , \quad C_1 = \frac{5C}{4}}$$

20. Par définition $\mathcal{P}_g = \dfrac{1}{2}\Re\{\underline{e}.\underline{i}^*\} = \Re\{\underline{E}.\underline{I}^*\}$. Or, pour $\omega = \omega'_0$, on a $\underline{I} = \dfrac{\underline{E}}{\underline{Z}_e(\omega'_0)} = \dfrac{15}{2}\dfrac{\underline{E}}{R(1-3j)}$,

d'où :

$$\boxed{\mathcal{P}_g = \frac{3E^2}{4R}}$$

21. La puissance moyenne dissipée dans la charge résistive est $\mathcal{P}_u = \dfrac{1}{2}\Re\{\underline{v}'.\underline{i}'^*\} = \Re\{\underline{V}'.\underline{I}'^*\}$ avec,

dans les mêmes conditions, $\underline{V}'(\omega'_0) = \underline{T}'(j\omega'_0)\,\underline{E} = \dfrac{\underline{E}}{2(1+j)}$ et $\underline{I}'(\omega'_0) = \dfrac{\underline{V}'(\omega'_0)}{R}$, ce qui nous donne :

$$\boxed{\mathcal{P}_u = \frac{E^2}{8R}}$$

Particule chargée dans un champ magnétique.

22. On ne tient compte que du champ électrique, supposé constant et uniforme, pendant la durée du vol entre les deux "D". Le théorème de l'énergie cinétique appliqué à un proton conduit à :

$$\boxed{\Delta\mathcal{E}_c = qV = qE_0 d}$$

23. La deuxième loi de Newton appliquée à un proton qui évolue dans le champ magnétique **B**, uniforme et constant, s'écrit $m\mathbf{a} = q(\mathbf{v} \wedge \mathbf{B})$. Elle montre que **a.v** = 0 soit $\mathbf{v}^2$ = Cte. Le mouvement du proton est circulaire uniforme et le rayon de courbure R de sa trajectoire est tel que $m\dfrac{v^2}{R} = qvB$, soit :

$$\boxed{R = \frac{mv}{qB}}$$

24. Le proton parcourt la distance πR à la vitesse constante v ; il met donc une durée :

$$\boxed{T = \frac{\pi R}{v} = \frac{\pi m}{qB}}$$

25. Le champ électrique **E**, entre les deux "D", est toujours accélérateur s'il présente une période minimale $T_0 = 2T$ soit une pulsation :

$$\boxed{\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{qB}{m}}$$

C'est ce que l'on nomme la pulsation cyclotron.

26. A la sortie du cyclotron la vitesse d'un proton est telle que $v = \dfrac{qBR_0}{m}$ ce qui conduit à une énergie cinétique :

$$\boxed{\mathcal{E}_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{q^2B^2R_0^2}{2m}}$$

27. A chaque demi-tour l'énergie cinétique du proton augmente de $\Delta\mathcal{E}_c$. Il en résulte que le nombre N de tours effectués par une particule avant éjection est tel que $\mathcal{E}_c = 2N\,\Delta\mathcal{E}_c$, soit :

$$\boxed{N = \frac{qB^2R_0^2}{4mdE_0}}$$

Thermodynamique.

28. Le réfrigérateur fonctionne de façon réversible entre deux sources de températures constantes ainsi, pour un cycle, le premier principe de la thermodynamique conduit à :

$$W + Q_f + Q_c = 0$$

et le second principe à :

$$\frac{Q_f}{T_f} + \frac{Q_c}{T_c} = 0$$

Par ailleurs l'efficacité de la machine thermique est définie par $\eta_r = \dfrac{Q_f}{W}$. On en déduit aisément :

$$\boxed{\eta_r = \frac{T_f}{T_c - T_f} = 7{,}11}$$

29. En fait le fonctionnement de la machine n'est pas réversible et on a $\dfrac{Q_c}{Q_f} = -k\dfrac{T_c}{T_f}$. Il en résulte une nouvelle efficacité :

$$\boxed{\eta_i = \frac{T_f}{kT_c - T_f} = 2{,}71}$$

30. Dans ce cas, toujours au cours d'un cycle, le second principe de la thermodynamique nous conduit à $\dfrac{Q_c}{T_c} + \dfrac{Q_f}{T_f} + S_p = 0$ d'où on déduit :

$$\boxed{\frac{S_p}{W} = \frac{\dfrac{Q_c}{T_c} + \dfrac{Q_f}{T_f}}{Q_c + Q_f} = \frac{1-k}{T_f - kT_c} = 2.10^{-3}\,K^{-1}}$$