EPL - SESSION 1999
CORRIGÉ

Électrocinétique : régime transitoire.

1. La loi des mailles conduit à l'équation différentielle $E = R\,i(t) + L\dfrac{d\,i(t)}{dt}$ dont la solution générale est de la forme $i(t) = K\exp\left(-\dfrac{R}{L}t\right) + \dfrac{E}{R}$. La continuité de l'énergie emmagasinée dans la bobine implique la continuité de l'intensité soit $i(0^+) = i(0^-) = 0$ qui entraîne $K = -\dfrac{E}{R}$. En définitive il vient :

$$\boxed{i(t) = \frac{E}{R}\left[1 - \exp\left(-\frac{R}{L}t\right)\right]}$$

2. La différence de potentiel entre A et B est $U_{AB} = R_1 i(t) + L_1\dfrac{d\,i(t)}{dt}$ où i(t) est l'intensité du courant dans la branche ABC. En utilisant le résultat de la question **1** et compte tenu que, dans un montage série, les résistances et les inductances propres s'ajoutent respectivement, il vient :

$$i(t) = \frac{E}{R_1 + R_2}\left[1 - \exp\left(-\frac{R_1 + R_2}{L_1 + L_2}t\right)\right]$$

On en déduit :

$$U_{AB} = \frac{R_1 E}{R_1 + R_2}\left[1 - \exp\left(-\frac{R_1 + R_2}{L_1 + L_2}t\right)\right] + \frac{L_1 E}{L_1 + L_2}\exp\left(-\frac{R_1 + R_2}{L_1 + L_2}t\right)$$

Cette différence de potentiel sera indépendante du temps si $\dfrac{R_1}{R_1 + R_2} = \dfrac{L_1}{L_1 + L_2}$ soit :

$$\boxed{\frac{R_1}{R_2} = \frac{L_1}{L_2}}$$

3. Dans ce cas on aura $U_{AB} = \dfrac{R_1 E}{R_1 + R_2}$ et $i(t) = \dfrac{E}{R_1 + R_2}\left[1 - \exp\left(-\dfrac{R_1}{L_1}t\right)\right]$. L'énergie consommée dans le tronçon AB, pendant l'intervalle de temps [0,t], est définie par $W_{AB} = \displaystyle\int_0^t U_{AB}\, i(t')\,dt'$, ce qui nous donne :

$$\boxed{W_{AB} = \frac{L_1 E^2}{(R_1 + R_2)^2}\left[\frac{R_1}{L_1}t - \left(1 - \exp\left(-\frac{R_1}{L_1}t\right)\right)\right]}$$

4. Pour que la différence de potentiel U_{BD} puisse être nulle il faut que simultanément :

♦ U_{AD} soit indépendante du temps ce qui impose, dans la branche ADC, $\dfrac{R_3}{R_4} = \dfrac{L_3}{L_4}$;

♦ $U_{AB} = U_{AD}$, soit, d'après la question **2**, $\dfrac{R_1}{R_1 + R_2} = \dfrac{R_3}{R_3 + R_4}$ donc $\dfrac{R_1}{R_2} = \dfrac{R_3}{R_4}$.

En définitive on doit avoir :

$$\boxed{\frac{L_1}{L_2} = \frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_4} = \frac{L_3}{L_4}}$$

Électrocinétique : régime continu.

5. On remplace les sources de courant par des interrupteurs ouverts d'où la résistance du générateur de Norton équivalent au dipôle :

$$R_N = 2r + R$$

6. On utilise le théorème de superposition et le diviseur de courant. La symétrie du montage conduit alors à :

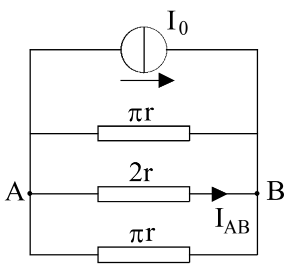
$$I_N = 2\frac{(r+R)}{R+2r}I_0$$

Électrocinétique : régime continu (bis).

7. La résistance du conducteur diamétral, de longueur d, de section s et de résistivité ρ, est telle que $2r = \rho\frac{d}{s}$. Il en résulte, pour le demi-cercle de longueur $\frac{\pi d}{2}$, de même section et de même résistivité, une résistance $r' = \rho\frac{\pi d}{2s} = \pi r$. Ces résistances sont montées en parallèle entre A et B, d'où la résistance équivalente du système :

$$R_{AB} = \frac{2\pi r}{\pi + 4}$$

8. Le montage proposé est, en utilisant la représentation de Norton, équivalent à celui représenté ci-contre avec $I_0 = \frac{E}{\pi r}$. On a donc :



$$I_{AB} = \frac{U_{AB}}{2r} = \frac{R_{AB}}{2r}I_0 = \frac{E}{r(\pi+4)}$$

9. La bissectrice intérieure de AOC et DOB est axe de symétrie du système donc A et C d'une part, B et D d'autre part, sont au même potentiel. Il en résulte que :

$$I_{DB} = 0$$

Par ailleurs on peut isoler les circuits AOD et COD, identiques, ce qui entraîne :

$$I_{AD} = \frac{2E}{r(\pi+4)}$$

10. Dans cette situation COD est axe de symétrie du système alors que AOB est axe d'antisymétrie ; il en résulte que les points A, O et B sont au même potentiel ce qui permet de supprimer ce fil. On observe alors que $I_{DO} = 2I_{AD}$. Ainsi, en utilisant la maille CADOC on obtient :

$$I_{AD} = \frac{2E}{r(\pi+4)} = \frac{I_{DO}}{2}$$

Électrostatique.

11. Toute rotation autour d'un axe de la sphère laisse le système invariant donc **E** = **E**(r) où r est la distance du point considéré au centre de la sphère. Par ailleurs tout plan contenant le centre de la sphère est plan de symétrie pour la distribution de charge ; **E** , vecteur vrai, est donc radial soit $\mathbf{E} = E(r)\mathbf{u}_r$.
Le théorème de Gauss, appliqué à une surface sphérique Σ, de rayon r, concentrique à la sphère chargée, nous conduit à :

$$4\pi r^2 E(r) = \begin{cases} \dfrac{Q}{\varepsilon_0} \text{ pour } r > b \\ 0 \text{ pour } r < b \end{cases}$$

d'où :

$$\mathbf{E} = \begin{cases} \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\mathbf{u}_r}{r^2} \text{ pour } r > b \\ \mathbf{0} \text{ pour } r < b \end{cases}$$

Ensuite, comme $\mathbf{E} = -\dfrac{dV(r)}{dr}\mathbf{u}_r$, on obtient par intégration :

$$V = \begin{cases} \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} + K_1 \text{ pour } r > b \\ K_2 \text{ pour } r < b \end{cases}$$

On détermine les constantes K_1 et K_2 à l'aide des conditions aux limites :

♦ $\lim\limits_{r\to+\infty} V(r) = 0$ d'où $K_1 = 0$;

♦ continuité de V(r) en r = b soit $K_2 = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 b}$.

En définitive le potentiel créé par la charge Q à l'intérieur de la sphère est uniforme et égal à :

$$\boxed{V(r<b) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 b}}$$

12. Le champ électrostatique créé en P par l'ensemble des deux sphères identiques - même charge électrique Q - et la charge ponctuelle −2Q est identique à celui produit par trois charges ponctuelles Q en A, Q en B et −2Q en O. Le théorème de superposition nous permet d'écrire :

$$\mathbf{E}(P) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\mathbf{AP}}{AP^3} + \frac{\mathbf{BP}}{BP^3} - 2\frac{\mathbf{OP}}{OP^3}\right)$$

avec $\mathbf{OP} = x\mathbf{u}_x$ (x > 0), $\mathbf{AP} = x\mathbf{u}_x - a\mathbf{u}_y$ et $\mathbf{BP} = x\mathbf{u}_x + a\mathbf{u}_y$. On en déduit aisément :

$$\boxed{\mathbf{E}(P) = \frac{2Qx}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\left(x^2+a^2\right)^{3/2}} - \frac{1}{x^3}\right)\mathbf{u}_x}$$

Notons que les plans xOy et xOz étant plans de symétrie de la distribution de charges, **E**(P) appartient à leur intersection c'est-à-dire est colinéaire à $\mathbf{u}_x$.

13. Le champ électrostatique créé en P par les quatre sphères identiques - même charge Q - est identique à celui produit par quatre charges pontuelles, de même valeur Q, placées aux sommets du carré. Par ailleurs, les plans contenant O_1, P et O_3 d'une part, O_2, P et O_4 d'autre part, sont plans de symétrie de la distribution ; il en résulte que **E'**(P) appartient à leur intersection c'est-à-dire dirigé suivant $\mathbf{u}_z$. On a donc $\mathbf{E}'(P) = 4\left[\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\mathbf{O_1P}.\mathbf{u}_z}{O_1P^3}\right]\mathbf{u}_z$ avec $O_1P = \sqrt{z^2 + \left(\sqrt{2}a\right)^2}$, d'où :

$$\boxed{\mathbf{E}'(P) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{4z}{\left(z^2+2a^2\right)^{3/2}}\mathbf{u}_z}$$

14. Dans ce cas les plans contenant P et orthogonaux respectivement à $\mathbf{O}_1\mathbf{O}_2$ et $\mathbf{O}_1\mathbf{O}_4$ sont plans d'antisymétrie de la distribution. **E"**(P) est donc orthogonal à ces plans ce qui implique :

$$\boxed{\mathbf{E}''(P) = \mathbf{0}}$$

Magnétostatique.

15. Toute rotation autour de l'axe Oz et toute translation parallèlement à cet axe laisse la distribution de courant invariante, on a donc **B** = **B**(r) où r est la distance du point considéré au fil. Par ailleurs, tout plan contenant l'axe Oz est plan de symétrie pour la distribution de courant ; **B**, pseudo-vecteur, est donc orthoradial soit $\mathbf{B}(P) = B(r)\mathbf{u}_\theta$.

On applique le théorème d'Ampère à un contour circulaire $\mathcal{C}$, de rayon r, centré sur l'axe, ce qui nous donne $2\pi r B(r) = \mu_0 I$, d'où :

$$\boxed{\mathbf{B}(P)=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}\mathbf{u}_\theta}$$

16. Soit un élément de courant $I.d\ell = I\,dz\,\mathbf{u}_z$ du fil AC entourant le point P $\left(\mathbf{OP} = h\,\mathbf{u}_y + z\,\mathbf{u}_z\right)$. Il subit, de la part du champ magnétique créé par le fil infini, une force de Laplace :

$$d\mathbf{F} = I.d\ell \wedge \mathbf{B} = \left(I\,dz\,\mathbf{u}_z\right)\wedge\left(-\frac{\mu_0 I}{2\pi h}\mathbf{u}_x\right) = -\frac{\mu_0 I^2}{2\pi h}dz\,\mathbf{u}_y$$

On en déduit par intégration la résultante des forces de Laplace :

$$\boxed{\mathbf{F}=-\frac{\mu_0 I^2 a}{2\pi h}\mathbf{u}_y}$$

17. Le moment en O des forces de Laplace qui s'exercent sur l'élément de courant précédent est :

$$d\mathbf{M}(O) = \mathbf{OP}\wedge d\mathbf{F} = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi h}z\,dz\,\mathbf{u}_x$$

Par intégration on obtient le moment en O des forces de Laplace qui s'exercent sur le fil AC :

$$\boxed{\mathbf{M}(O)=\frac{\mu_0 I^2 a^2}{4\pi h}\mathbf{u}_x}$$

18. Les résultats précédents nous montrent que le torseur des forces de Laplace, qui s'exercent sur la fil AC, est un glisseur. On peut donc le représenter par le vecteur unique **F** appliqué en un point K de [AC], avec $\mathbf{OK} = h\mathbf{u}_y + b\mathbf{u}_z$, tel que $\mathbf{M}(K) = \mathbf{M}(O) + \mathbf{F}\wedge\mathbf{OK} = \mathbf{0}$. En développant on en déduit aisément :

$$\boxed{b=\frac{a}{2}}$$

Optique géométrique.

19. On a $A \xrightarrow{\mathcal{L}_1} A_1 \xrightarrow{\mathcal{L}_2} A'$ ce qui nous donne, respectivement, en utilisant la formule de conjugaison de Newton :

$$\overline{F_1A}.\overline{F'_1A_1} = -f'^2_1 \quad , \quad \overline{F_2A_1}.\overline{F'_2A'} = -f'^2_2$$

avec $\overline{F_1A} = \overline{F_1O_1} + \overline{O_1A} = f'_1 + p$. Il en résulte que $\overline{F'_1A_1} = -\dfrac{f'^2_1}{f'_1+p}$ d'où on déduit :

$$\overline{F_2A_1} = \overline{F_2F'_1} + \overline{F'_1A_1} = -e - \frac{f'^2_1}{f'_1+p}$$

qui entraîne :

$$\overline{F'_2A'} = \frac{f'^2_2\left(f'_1+p\right)}{f'^2_1+e\left(f'_1+p\right)}$$

En définitive on obtient :

$$\boxed{p'=\overline{O_2A'}=\overline{O_2F'_2}+\overline{F'_2A'}=f'_2\,\frac{f'^2_1+(e+f'_2)(f'_1+p)}{f'^2_1+e(f'_1+p)}}$$

20. Si $p = -f'_1$ alors il vient :

$$\boxed{p'=f'_2}$$

Lorsque l'objet AB se trouve dans le plan focal objet de $\mathcal{L}_1$ son image se forme dans le plan focal image de $\mathcal{L}_2$.

21. Dans ce cas le grandissement transversal du système, défini par $\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A_1B_1}} . \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{AB}}$, avec $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{A_1B_1}} = \frac{\overline{F'_2A'}}{\overline{F'_2O_2}}$ et $\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{F_1O_1}}{\overline{F_1A}}$, est tel que :

$$\gamma = \frac{-f'_1 f'_2}{f'^2_1 + e(p + f'_1)}$$

22. Si le système est afocal alors e = 0 ce qui nous donne :

$$p' = f'_2\left[1 + \frac{f'_2}{f'_1}(p + f'_1)\right] \quad , \quad \gamma = -\frac{f'_2}{f'_1}$$

23. On est toujours dans le cas du système afocal ; numériquement on obtient :

$$p' = 0{,}625\text{m} \quad , \quad \gamma = -0{,}5$$

L'image est renversée et deux fois plus petite que l'objet.

Mécanique du point.

24. Le théorème de l'énergie cinétique appliqué au point matériel entre les instants t = 0 et t > 0 se traduit par :

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = -mg\left(\frac{x^2}{2p} - \frac{p}{2}\right)$$

car seul le poids développe un travail non nul.

Or $v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{x}^2 + \left(\frac{x\dot{x}}{p}\right)^2 = \dot{x}^2\frac{\left(p^2 + x^2\right)}{p^2}$ d'où on déduit :

$$\dot{x}^2 = p\frac{p\left(v_0^2 + gp\right) - gx^2}{p^2 + x^2}$$

25. Quand l'altitude maximale y_1 est atteinte la vitesse du point matériel s'annule. Le théorème de l'énergie cinétique se traduit donc par $0 - \frac{1}{2}mv_0^2 = -mg\left(y_1 - \frac{p}{2}\right)$ d'où on tire :

$$y_1 = \frac{p}{2}\left(1 + \frac{v_0^2}{gp}\right)$$

26. Par définition $2\ddot{x} = \frac{d\left(\dot{x}^2\right)}{dx}$, d'où en utilisant le résultat de la question 24 :

$$\ddot{x} = \frac{-p^2x\left(v_0^2 + 2gp\right)}{\left(p^2 + x^2\right)^2}$$

27. On a $y = \frac{x^2}{2p}$ donc $\dot{y} = \frac{x\dot{x}}{p}$ puis $\ddot{y} = \frac{\dot{x}^2 + x\ddot{x}}{p}$. Avec les résultats précédents on en déduit :

$$\ddot{y} = \frac{-gx^4 + p^3\left(v_0^2 + gp\right) - 2gp^2x^2}{\left(p^2 + x^2\right)^2}$$

28. La deuxième loi de Newton appliqué au point matériel, dans le référentiel galiléen lié au support, se traduit par $m\mathbf{a}(P/\mathcal{R}) = \mathbf{N} + m\mathbf{g}$. En projection suivant Ox on obtient :

$$\boxed{N_x = m\ddot{x} = \frac{-mp^2x\left(v_0^2 + 2gp\right)}{\left(p^2 + x^2\right)^2}}$$

29. La deuxième loi de Newton en projection suivant Oy nous conduit à :

$$\boxed{N_y = m\left(g + \ddot{y}\right) = \frac{mp^3\left(v_0^2 + 2gp\right)}{\left(p^2 + x^2\right)^2}}$$

30. La liaison étant unilatérale les réponses correctes sont a et c.