EPL - SESSION 2000
CORRIGÉ

Magnétostatique.

1. Les spires jointives, constituées par un fil de diamètre a, occupent une longueur $L = \dfrac{r_2 - r_1}{\sin\alpha}$ d'apothème. Leur nombre est donc tel que :

$$\boxed{N = \frac{L}{a} = \frac{r_2 - r_1}{a\sin\alpha}}$$

2. Une distance dz le long de l'axe Oz correspond à une distance $dL = \dfrac{dz}{\cos\alpha}$ sur l'apothème donc à un nombre de spires :

$$\boxed{dN = \frac{dz}{a\cos\alpha}}$$

3. Les dN spires, situées entre les plans z et z + dz, ont un rayon moyen r ce qui correspond à une longueur totale de fil :

$$d\ell = 2\pi r\, dN = \frac{2\pi r}{a\cos\alpha} dz = \frac{2\pi r\, dr}{a\sin\alpha}$$

donc à une résistance élémentaire :

$$dR = \rho\frac{4\, d\ell}{\pi a^2} = \frac{8\rho}{a^3 \sin\alpha} r\, dr$$

Ces résistances élémentaires sont montées en série donc la résistance totale du bobinage est :

$$\boxed{R = \int_{r_1}^{r_2} dR = \frac{4\rho\left(r_2^2 - r_1^2\right)}{a^3 \sin\alpha}}$$

4. Le champ magnétique créé en S par une spire circulaire de rayon r parcourue par le courant d'intensité I est :

$$\boxed{\mathbf{B}_1 = \frac{\mu_0 I}{2r}\sin^3\alpha\, \mathbf{u}_z}$$

5. Les dN spires, de rayon r, créent en S un champ magnétique élémentaire :

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2r} dN \sin^3\alpha\, \mathbf{u}_z = \frac{\mu_0 I}{2a}\sin^2\alpha \frac{dr}{r}\mathbf{u}_z$$

Pour tout le bobinage on obtient, par intégration, un champ magnétique total :

$$\boxed{\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2a}\sin^2\alpha \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)\mathbf{u}_z}$$

Optique géométrique.

6. On doit avoir $A_o \xrightarrow{\mathcal{L}_1} A_1 \xrightarrow{\mathcal{L}_2} \infty$ donc A_1 est confondu avec F_2 foyer principal objet de $\mathcal{L}_2$. La relation de conjugaison de Descartes :

$$-\frac{1}{\overline{O_1A_o}} + \frac{1}{\overline{O_1A_1}} = \frac{1}{f'_1}$$

avec $\overline{O_1A_1} = \overline{O_1F_2} = \overline{O_1F'_1} + \overline{F'_1F_2} = f'_1 + \Delta$ nous donne :

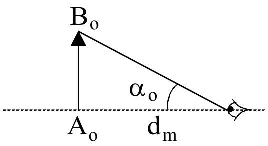
$$d_0 = \overline{O_1A_o} = -\frac{f'_1(f'_1+\Delta)}{\Delta} = -4{,}1\,\text{mm}$$

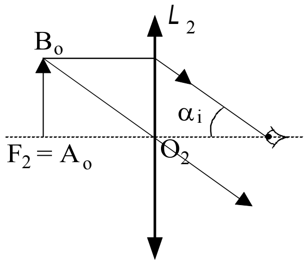
7. Le grandissement transversal de l'objectif est :

$$\gamma_{ob} = \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{A_oB_o}} = \frac{\overline{O_1F_2}}{\overline{O_1A_o}} = -\frac{\Delta}{f'_1} = -40$$

8. Les figures ci-dessous nous montrent que le grossissement commercial de l'oculaire est :

$$G_{oc} = \frac{\alpha_i}{\alpha_0} \approx \frac{\overline{A_oB_o}}{f'_2}\frac{d_m}{\overline{A_oB_o}} = \frac{d_m}{f'_2}$$





9. Le grossissement commercial du microscope est tel que :

$$G_m = \frac{\overline{A_1B_1}}{f'_2}\frac{d_m}{\overline{A_oB_o}} = \gamma_{ob}G_{oc} = -400$$

10. La puissance intrinsèque du microscope est :

$$\mathcal{P} = \left|\frac{\alpha_i}{\overline{A_oB_o}}\right| = \left|\frac{G_m}{d_m}\right| = 1600\,\delta$$

Électrocinétique : régime sinusoïdal.

11. Par définition $\mathcal{P}_M = UI\cos\varphi$ d'où :

$$I = \frac{\mathcal{P}_M}{U\cos\varphi} = 33{,}3\,\text{A}$$

12. La puissance est entièrement consommée par le résistor donc $\mathcal{P}_M = RI^2$ qui nous donne :

$$R = \frac{\mathcal{P}_M}{I^2} = 4\,\Omega$$

13. L'impédance du moteur est $Z = \sqrt{R^2 + L^2\omega^2} = \dfrac{U}{I}$ d'où on déduit :

$$L = \frac{1}{2\pi f}\sqrt{\left(\frac{U}{I}\right)^2 - R^2} = 17\,\text{mH}$$

14. Initialement le facteur de puissance est inductif ($\varphi > 0$), il peut le rester ($\varphi' > 0$) ou devenir capacitif ($\varphi' < 0$).

L'intensité instantanée totale dans la ligne est :

$$\underline{i'} = \underline{i} + \underline{i}_C = \left[\frac{1}{R + jL\omega} + jC\omega\right]\underline{u} = \frac{R}{Z^2}\left[(1 - j\tan\varphi) + j\omega\frac{Z^2C}{R}\right]\underline{u}$$

On en déduit :

$$\pm|\tan\varphi'| = \omega\frac{Z^2C}{R} - \tan\varphi$$

soit, puisque $\frac{R}{Z^2} = \frac{\mathcal{P}_M}{U^2}$, il vient :

$$C = \frac{\mathcal{P}_M}{2\pi fU^2}\left[\tan\varphi \pm |\tan\varphi'|\right]$$

d'où la plus petite valeur de C :

$$\boxed{C = 246\mu F}$$

15. La présence du condensateur ne modifie pas le puissance absorbée par le moteur, donc :

$$\boxed{\mathcal{P}'_M = 4{,}4 kW}$$

16. Le courant qui circule dans la ligne a maintenant une intensité efficace :

$$\boxed{I' = \frac{\mathcal{P}'_M}{U\cos\varphi'} = 22{,}2 A}$$

Thermodynamique.

17. La transformation étant isentropique on peut utiliser la loi de Laplace, $T^\gamma P^{1-\gamma} = Cte$, qui nous donne :

$$\boxed{P_B = P_A\left(\frac{T_A}{T_B}\right)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} = 10^6 Pa}$$

18. Pour un gaz parfait on a $\frac{PV}{T} = Cte$ d'où on déduit :

$$\boxed{V_B = V_A \frac{P_A T_B}{P_B T_A} = 0{,}8.10^{-4} m^3}$$

19. La détente est isotherme donc la loi de Mariotte, PV = Cte, nous conduit à :

$$\boxed{P_C = P_B \frac{V_B}{V_A} = 1{,}93.10^5 Pa}$$

20. Pour une évolution isotherme réversible on a :

$$dS = \frac{P}{T}dV = nR\frac{dV}{V} = \frac{P_A V_A}{T_A}\frac{dV}{V}$$

On en déduit la variation d'entropie au cours de la transformation BC :

$$\boxed{\Delta S_{BC} = \frac{P_A V_A}{T_A}\ln\left(\frac{V_A}{V_B}\right) = 0{,}471 J.K^{-1}}$$

21. S est une fonction d'état donc, au cours d'un cycle, $\Delta S = \Delta S_{AB} + \Delta S_{BC} + \Delta S_{CA} = 0$. Or, $\Delta S_{AB} = 0$ car la transformation AB est isentropique ; il en résulte que :

$$\boxed{\Delta S_{CA} = -\Delta S_{BC} = -0{,}471 J.K^{-1}}$$

22. La transformation CA est isochore et, par ailleurs, le gaz parfait suit la première loi de Joule. Le premier principe de la thermodynamique nous conduit à :

$$\Delta U_{CA} = \frac{nR}{\gamma - 1}\left(T_A - T_B\right) = \frac{P_A V_A}{T_A}\frac{\left(T_A - T_B\right)}{\gamma - 1} = Q_{CA}$$

soit :

$$\boxed{Q_{CA} = -96{,}3 J}$$

23. D'après le deuxième principe de la thermodynamique :

$$\Delta S_{CA} = \frac{Q_{CA}}{T_A} + S^c_{CA}$$

car la source a une température constante T_A. Il en résulte que :

$$\boxed{S_{CA}^{c} = \Delta S_{CA} - \frac{Q_{CA}}{T_A} = 0{,}196 \text{J.K}^{-1} > 0}$$

24. L'évolution CA est monotherme irréversible.

Mécanique du point.

25. La force de Lorentz qui s'exerce sur la particule est :

$$\boxed{\mathbf{F}_L = q(\mathbf{v} \wedge \mathbf{B})}$$

26. Le théorème de composition des vitesses, $\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{OM}$, montre que la vitesse initiale de la particule dans $\mathcal{R}'$ est :

$$\boxed{\mathbf{v}'_0 = \mathbf{v}_0}$$

27. La force d'inertie d'entraînement subit par la particule dans $\mathcal{R}'$ est :

$$\mathbf{F}_{ie} = -m\boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{OM}) = -m\Omega^2\, \mathbf{u}_z \wedge (\mathbf{u}_z \wedge \mathbf{OM}) = -m\Omega^2 \left[(\mathbf{u}_z . \mathbf{OM}) . \mathbf{u}_z - \mathbf{OM}\right]$$

soit :

$$\boxed{\mathbf{F}_{ie} = m\Omega^2 \mathbf{OH}}$$

28. La force résultante qui s'exerce sur la particule dans $\mathcal{R}'$ est :

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}'_L + \mathbf{F}_{ie} + \mathbf{F}_{ic} = q(\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}) + m\Omega^2 \mathbf{OH} - 2m(\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{v}')$$

Or, d'après le théorème de composition des vitesses $\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{OM}$ d'où :

$$q(\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}) = q(\mathbf{v}' \wedge \mathbf{B}) + q(\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{OM}) \wedge \mathbf{B} = m\omega_c(\mathbf{v}' \wedge \mathbf{u}_z) - \frac{1}{2} m\omega_c^2 \mathbf{OH}$$

D'autre part :

$$-2m(\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{v}') = 2m\Omega(\mathbf{v}' \wedge \mathbf{u}_z) = -m\omega_c(\mathbf{v}' \wedge \mathbf{u}_z)$$

En définitive :

$$\boxed{\mathbf{F} = -\frac{1}{4} m\omega_c^2 \mathbf{OH}}$$

29. La deuxième loi de Newton appliquée à la particule dans $\mathcal{R}'$ donne en projection suivant Ox' :

$$\ddot{x}' = -\frac{1}{4}\omega_c^2 x'$$

qui s'intègre en :

$$x'(t) = A \sin\left(\frac{1}{2}\omega_c t\right) + A' \cos\left(\frac{1}{2}\omega_c t\right)$$

Or, à l'instant initial t = 0 on a x'(0) = 0 et $\dot{x}'(0) = v_{0x}$; on en déduit A' = 0 et $A = 2v_{0x}/\omega_c$ d'où :

$$\boxed{x'(t) = \frac{2v_{0x}}{\omega_c} \sin\left(\frac{1}{2}\omega_c t\right)}$$

30. La deuxième loi de Newton appliquée à la particule dans $\mathcal{R}'$ donne en projection suivant Oy' :

$$\ddot{y}' = -\frac{1}{4}\omega_c^2 y'$$

qui s'intègre en :

$$y'(t) = D \sin\left(\frac{1}{2}\omega_c t\right) + D' \cos\left(\frac{1}{2}\omega_c t\right)$$

Comme à l'instant initial y'(0) = 0 et $\dot{y}'(0) = 0$ il vient D = D' = 0 d'où :

$$\boxed{y'(t) = 0}$$

Dans $\mathcal{R}'$, la trajectoire de la particule est la sinusoïde d'équation $x' = \frac{2v_{0x}}{\omega_c} \sin\left(\frac{\omega_c}{2v_{0z}} z\right)$.