EPL - SESSION 2001
CORRIGÉ

Électrocinétique.

1. Les deux branches, en parallèle, sont identiques ; la loi des mailles nous donne alors l'équation différentielle :

$$\frac{d^2q(t)}{dt^2}+\omega_0^2 q(t)=E$$

si on pose $\omega_0^2=\dfrac{1}{LC}$. Cette équation s'intègre en :

$$q(t)=A\cos(\omega_0 t)+B\sin(\omega_0 t)+CE$$

Compte tenu des conditions initiales :

- ♦ q(0) = 0 continuité de la charge dans un condensateur car continuité de l'énergie ;
- ♦ $i(0)=\dot{q}(0)=0$ continuité de l'intensité du courant dans une bobine car continuité de l'énergie ;

il vient A = –CE et B = 0, d'où en définitive :

$$\boxed{q(t)=CE[1-\cos(\omega_0 t)]=4.10^{-6}[1-\cos(5.10^4 t)]}$$

2. La tension aux bornes du condensateur est telle que $u_c(t)=\dfrac{q(t)}{C}$ d'où sa valeur maximale :

$$\boxed{u_M=2E=40V}$$

3. On a :

$$v(M)-v(N)=[v(M)-v(B)]-[v(N)-v(B)]=\frac{q(t)}{C}-L\frac{d^2q(t)}{dt^2}=2\frac{q(t)}{C}-E$$

soit en utilisant le résultat de la question **1** :

$$\boxed{v(M)-v(N)=E[1-2\cos(\omega_0 t)]=20[1-2\cos(5.10^4 t)]}$$

4. On en déduit la valeur maximale de cette différence de potentiel :

$$\boxed{u'_M=60V}$$

5. L'impédance complexe de la branche AM_1B est $\underline{Z}_1=\dfrac{1}{jC_1\omega}\left(1-L_1C_1\omega^2\right)$ et celle de la branche AM_2B, $\underline{Z}_2=\dfrac{1}{jC_2\omega}\left(1-L_2C_2\omega^2\right)$. Il en résulte que l'impédance totale du circuit, $\underline{Z}=\dfrac{\underline{Z}_1\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1+\underline{Z}_2}$, est nulle pour $\omega=\omega_1$ ou $\omega=\omega_2$ donc le courant passe dans le circuit dans les deux cas (*court-circuit*).

6. Le courant ne passe pas dans le circuit si son impédance est infinie, soit si simultanément :

$$\left(1-L_1C_1\omega^2\right)\left(1-L_2C_2\omega^2\right)\neq 0 \text{ et } C_1\left(1-L_2C_2\omega^2\right)+C_2\left(1-L_1C_1\omega^2\right)=0$$

donc pour une pulsation ω_3 telle que :

$$\boxed{\omega_3^2=\frac{C_1+C_2}{C_1C_2(L_1+L_2)}}$$

7. Avec les valeurs numériques proposées on obtient :

$$N_1=\frac{1}{2\pi\sqrt{L_1C_1}}\approx 3{,}56\text{kHz},\quad N_2=\frac{1}{2\pi\sqrt{L_2C_2}}\approx 35{,}6\text{kHz}$$

et :

$$\boxed{N_3 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2 (L_1 + L_2)}} \approx 21\,\mathrm{kHz} \in [N_1, N_2]}$$

8. Pour $N = N_3$, donc $\omega = \omega_3$, on a $\underline{Z}_1(\omega_3) = -\underline{Z}_2(\omega_3) = j\dfrac{L_1C_1 - L_2C_2}{\sqrt{C_1C_2(C_1+C_2)(L_1+L_2)}}$ d'où l'amplitude I de l'intensité du courant qui circule dans les branches AM_1B et AM_2B :

$$\boxed{I = \frac{E}{|\underline{Z}_1(\omega_3)|} = \frac{E}{|\underline{Z}_2(\omega_3)|} = 79\,\mathrm{mA}}$$

Notons que, dans ce cas, $\underline{i}_1$ et $\underline{i}_2$ sont en opposition de phase et par ailleurs en quadrature avec la tension du générateur.

Électrostatique.

9. D'après le théorème de superposition le champ électrostatique créé au point P (x,y) par les deux charges ponctuelles est :

$$\mathbf{E}(P) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\mathbf{OP}}{OP^3} + \frac{\mathbf{AP}}{AP^3}\right)$$

avec $\mathbf{OP} = x\mathbf{u}_x + y\mathbf{u}_y$ et $\mathbf{AP} = (x-a)\,\mathbf{u}_x + y\mathbf{u}_y$, d'où on déduit :

$$\boxed{\begin{aligned} E_x &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}} + \frac{(x-a)}{((x-a)^2+y^2)^{3/2}}\right] \\ E_y &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{y}{(x^2+y^2)^{3/2}} + \frac{y}{((x-a)^2+y^2)^{3/2}}\right] \end{aligned}}$$

10. Les deux charges électriques placées respectivement en O et A sont identiques on aura donc $E_x = 0$ sur la médiatrice du segment [OA] soit sur la droite :

$$\boxed{\Delta x = a/2}$$

En tout point de cette droite le champ électrostatique se réduit à :

$$\boxed{\mathbf{E}(P) = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\frac{y}{\left(y^2 + \dfrac{a^2}{4}\right)^{3/2}}\mathbf{u}_y}$$

11. Si on suppose $|y| << a$, le champ électrostatique sur Δ créé par les charges placées en O et A est tel que $\mathbf{E}(P) \approx \dfrac{4q}{\pi\varepsilon_0}\dfrac{y}{a^3}\mathbf{u}_y$. L'équilibre de la charge q' se traduit alors par :

$$-mg\,\mathbf{u}_y + \frac{4qq'}{\pi\varepsilon_0}\frac{y_e}{a^3}\mathbf{u}_y = \mathbf{0}$$

En posant $k = -\dfrac{4qq'}{\pi\varepsilon_0 a^3} > 0$ on obtient :

$$\boxed{y_e = -\frac{mg}{k}}$$

12. Si on écarte la charge q' de sa position d'équilibre, en restant sur Δ, la deuxième loi de Newton, appliquée à cette charge, nous donne en projection suivant $\mathbf{u}_y$:

$$m\ddot{y} = -mg - ky$$

d'où l'équation différentielle du mouvement de la charge :

$$\ddot{y} + \frac{k}{m}(y - y_e) = 0$$

La charge q' effectue des oscillations harmoniques, autour de sa position d'équilibre (*stable*), de période :

$$\boxed{T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}}$$

13. L'énergie électrostatique de l'ensemble des trois charges est :

$$U_e = \frac{1}{2}\left\{\frac{q(q+q')}{4\pi\varepsilon_0 a} + \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0 a}\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a}\left(q+\frac{q'}{\sqrt{2}}\right)\right\}$$

soit :

$$U_e = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 a}\left[q^2 + qq'\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right]$$

14. On aura $U_e = 0$ si la charge q' est telle que :

$$\boxed{q' = -\frac{q\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}}$$

Magnétostatique.

15. Toute rotation autour de l'axe Oz et toute translation parallèlement à cet axe laisse la distribution de courant invariante, on a donc $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\rho)$ où ρ est la distance du point considéré à l'axe Oz. Par ailleurs, tout plan contenant l'axe Oz est plan de symétrie pour la distribution de courant ; **B**, pseudo-vecteur, est donc orthoradial soit $\mathbf{B}(P) = B(\rho)\mathbf{u}_\theta$.
Le théorème d'Ampère appliqué à un contour circulaire d'axe Oz et de rayon $\rho > b$ nous donne :

$$2\pi\rho B(\rho) = \mu_0 I = \mu_0\pi b^2 J$$

d'où on déduit :

$$\boxed{\mathbf{B}(P) = \frac{\mu_0 b^2 J}{2\rho}\mathbf{u}_\theta}$$

16. On effectue la même démarche que dans la question précédente mais avec maintenant $\rho < b$ ce qui nous donne :

$$2\pi\rho B(\rho) = \mu_0\pi\rho^2 J$$

d'où on tire :

$$\boxed{\mathbf{B}(P) = \frac{\mu_0 J\rho}{2}\mathbf{u}_\theta}$$

17. Compte tenu que $\mathbf{J} = J\mathbf{u}_z$, $\mathbf{OP} = \rho\mathbf{u}_\rho + z\mathbf{u}_z$ et $\mathbf{u}_\theta = \mathbf{u}_z \wedge \mathbf{u}_\rho$, il vient aisément, pour $\rho < b$:

$$\boxed{\mathbf{B}(P) = \frac{\mu_0}{2}(\mathbf{J} \wedge \mathbf{OP})}$$

18. Le même raisonnement qu'à la question 15 nous donne :
♦ $2\pi\rho B_1(\rho) = \mu_0\pi\left(\rho^2 - b_2^2\right)J$ pour $\rho \in [b_2, b_1]$ soit :

$$\boxed{\mathbf{B}_1(P) = \frac{\mu_0 J}{2}\left(\rho - \frac{b_2^2}{\rho}\right)\mathbf{u}_\theta}$$

♦ $2\pi\rho B_2(\rho) = 0$ pour $\rho < b_2$ soit :

$$\boxed{\mathbf{B}_2(P) = \mathbf{0}}$$

Notons, qu'en l'absence de courant superficiel, il y a continuité du champ magnétique pour $\rho = b_2$.

19. On peut considérer que le système proposé résulte de la superposition :
♦ d'un cylindre "infini", d'axe O_1z, de rayon b_1, parcouru par un courant continu de densité uniforme **J** ;
♦ d'un cylindre "infini", d'axe O_2z parallèle à O_1z et distant de 2a, de rayon $b_2 < b_1$, parcouru par un courant continu de densité uniforme **–J**.
On utilise alors le résultat de la question 17 et le théorème de superposition d'où :

$$\mathbf{B}'(\mathrm{P}) = \frac{\mu_0}{2}\left(\mathbf{J}\wedge\mathbf{O}_1\mathbf{P}\right) + \frac{\mu_0}{2}\left(-\mathbf{J}\wedge\mathbf{O}_2\mathbf{P}\right) = \frac{\mu_0}{2}\left(\mathbf{J}\wedge\mathbf{O}_1\mathbf{O}_2\right)$$

On observe qu'à l'intérieur de la cavité le champ magnétique est uniforme, parallèle à O_1y et de norme :

$$\boxed{\left\|\mathbf{B}'(\mathrm{P})\right\| = \mu_0 \mathrm{Ja}}$$

Optique géométrique.

20. On a $A \xrightarrow{L} A' \xrightarrow{M} A_1$ donc en utilisant les relations de conjugaison :

♦ pour la lentille L, $-\dfrac{1}{\overline{OA}} + \dfrac{1}{\overline{OA'}} = \dfrac{1}{f'}$, soit $\overline{OA'} = \dfrac{pf'}{p+f'}$ avec $\overline{OA} = p$;

♦ pour le miroir plan M, $\overline{SA_1} = -\overline{SA'}$, soit $\overline{OA_1} = 2\overline{OS} - \overline{OA'} = 4f' - \overline{OA'}$.

Des deux relations précédentes on déduit :

$$\boxed{\overline{OA_1} = \frac{(3p+4f')f'}{p+f'}}$$

21. Après retraversée de la lentille, le sens de la lumière étant inversé, on a :

$$-\frac{1}{\overline{OA_1}} + \frac{1}{\overline{OA_2}} = -\frac{1}{f'}$$

qui nous conduit à :

$$\boxed{\overline{OA_2} = -\frac{f'(3p+4f')}{2p+3f'}}$$

22. Si A_2 est confondu avec A - points de Bravais - soit $\overline{OA_2} = \overline{OA}$, il faut que p vérifie l'équation du second degré :

$$\boxed{p^2 + 3f'p + 2f'^2 = 0}$$

23. Cette équation admet comme solutions $p = \dfrac{-3f' \pm f'}{2}$ soit, puisque $p_1 < p_2$:

$$\boxed{p_1 = -2f' = -20\text{cm} \quad , \quad p_2 = -f' = -10\text{cm}}$$

Dans les deux cas l'objet est réel pour la lentille L.

24. Pour une position quelconque de l'objet, le grandissement transversal du système optique est :

$$\gamma = \frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{A_1B_1}} \cdot \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{A'B'}} \cdot \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$$

avec $\dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = \dfrac{f'}{p+f'}$, $\dfrac{\overline{A_1B_1}}{\overline{A'B'}} = +1$ (miroir plan), $\dfrac{\overline{A_2B_2}}{\overline{A_1B_1}} = \dfrac{\overline{OA_2}}{\overline{OA_1}} = -\dfrac{p+f'}{2p+3f'}$. En définitive :

$$\boxed{\gamma = \frac{-f'}{2p+3f'}}$$

25. Pour $p = p_1$ puis $p = p_2$ on obtient respectivement :

$$\boxed{\gamma_1 = +1 \quad , \quad \gamma_2 = -1}$$

On montre aisément que ce système catadioptrique est équivalent à un miroir sphérique convexe de sommet Σ $\left(\overline{O\Sigma} = -2f'\right)$, de centre Ω $\left(\overline{O\Omega} = -f' = \overline{OF}\right)$, de rayon $\overline{R} = \overline{\Sigma\Omega} = f'$ et de vergence $V = -\dfrac{2}{\overline{R}} = -\dfrac{2}{f'} < 0$.

Les points de Bravais correspondent respectivement à Σ ($\gamma = +1$) et Ω ($\gamma = -1$).

Mécanique du point.

26. Par élimination du paramètre temps on obtient :

$$\boxed{x - y + z = 0}$$

27. On a $\|\mathbf{OP}\|^2 = x^2 + y^2 + z^2 = \dfrac{3b^2}{2}$ donc le point matériel P se déplace sur une sphère de centre O et de rayon :

$$\boxed{A = \sqrt{\frac{3}{2}}b}$$

28. La norme v du vecteur vitesse de P est $v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$ soit :

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{3}{2}}kb = Cte}$$

29. x, y et z sont des fonctions périodiques du temps de période :

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{k}}$$

30. La trajectoire de P est le cercle de centre O et de rayon A, intersection du plan défini à la question 26 et de la sphère déterminée à la question 27, décrit à la vitesse constante v : P est donc animé d'un mouvement circulaire uniforme.