EPL - SESSION 2002
CORRIGÉ

Optique géométrique.

1. On reconnait ici la ***méthode de Bessel*** qui permet de mesurer la distance focale d'une lentille mince convergente.
On a respectivement :

$$-p+p'=D \quad , \quad -\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=\frac{1}{f}$$

ce qui nous conduit, par élimination de p, à l'équation du second degré :

$$p'^2-Dp'+Df=0$$

qui admet pour solutions :

$$p'=\frac{D\pm\sqrt{D^2-4Df}}{2}$$

Ces solutions n'existent que si D > 4f ; on en déduit la distance d séparant les deux positions de la lentille :

$$\boxed{d=p'_+-p'_-=\sqrt{D^2-4Df}=447\text{mm}}$$

2. Le grandissement transversal G_t de l'image est :

$$\boxed{G_t=\frac{p'}{p}=1-\left[\frac{D\pm\sqrt{D^2-4Df}}{2f}\right]=\begin{cases}-0{,}38\\-2{,}62\end{cases}}$$

Dans les deux cas l'image est renversée.

3. Dans ce cas on a $d'^2=D^2-4Df'$ d'où on tire la distance focale de la lentille :

$$\boxed{f'=\frac{D^2-d'^2}{4D}=160\text{mm}}$$

4. Si on se place dans la situation où d = 0 alors :

$$\boxed{f''=\frac{D''}{4}=300\text{mm}}$$

5. Dans ces conditions le grandissement transversal de l'image est :

$$\boxed{G_{t1}=1-\frac{D''}{2f''}=-1}$$

Objet et image sont situés dans les plans antiprincipaux de la lentille.

Mécanique du point.

6. Le navire se déplace à la vitesse limite v donc la puissance développée par le moteur compense exactement celle développée par la force de résistance exercée par l'eau. Le théorème de la puissance cinétique nous conduit à écrire $\mathcal{P}=F.v=kv^4$ d'où on déduit :

$$\boxed{k=\frac{\mathcal{P}}{v^4}=6400\,\text{kg.s.m}^{-2}}$$

7. Dans ce cas le théorème de la puissance cinétique se traduit par :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)=-kv^4$$

d'où on tire :

$$dt = -\frac{m}{k}\frac{dv}{v^3}$$

On en déduit par intégration :

$$\boxed{t = -\frac{m}{k}\int_{v_1}^{v_2}\frac{dv}{v^3} = \frac{m}{2k}\left(\frac{1}{v_2^2}-\frac{1}{v_1^2}\right) = 24,4s}$$

8. Le théorème de la puissance cinétique peut aussi s'écrire :

$$\frac{dx}{dt}.\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = -kv^4$$

soit encore, puisque $v = \frac{dx}{dt}$:

$$dx = -\frac{m}{k}\frac{dv}{v^2}$$

Par intégration on obtient la distance parcourue par le navire :

$$\boxed{d = \frac{m}{k}\left(\frac{1}{v_2}-\frac{1}{v_1}\right)}$$

9. Numériquement :

$$\boxed{d = 97{,}1m}$$

Thermodynamique.

10. A partir de l'équation d'état d'un gaz parfait on obtient :

$$\boxed{n = \frac{p_i V_i}{RT_i} = 3{,}22}$$

11. Le récipient étant adiabatique, le premier principe de la thermodynamique conduit à écrire $\Delta U = W$ avec :

- ♦ $\Delta U = n C_v \left(T_f - T_i\right)$ car un gaz parfait suit la première loi de Joule ;
- ♦ $W = -p_f\left(V_f - V_i\right) = -n RT_f + \frac{p_f}{p_i} n RT_i$ car la pression extérieure est constante au cours de la transformation.

On en déduit la température finale du gaz :

$$\boxed{T_f = \frac{C_v + R(p_f/p_i)}{C_v + R}T_i = 277K}$$

12. Le volume occupé par le gaz dans l'état final est donc :

$$\boxed{V_f = nR\frac{T_f}{p_f} = 74{,}3\ell}$$

13. Le travail échangé avec le milieu extérieur est :

$$\boxed{W = nC_v(T_f - T_i) = -6429J}$$

14. La variation d'entropie du gaz est alors :

$$\boxed{\Delta S = nC_v \ln\left(\frac{T_f}{T_i}\right) + nR\ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right) = 33{,}8J.K^{-1}}$$

15. La transformation étant adiabatique et irréversible, l'entropie produite est égale à la variation d'entropie du gaz, soit :

$$\boxed{S_p = \Delta S = 33{,}8J.K^{-1}}$$

Électrocinétique.

16. Les caractéristiques du générateur de Thévenin équivalent au montage qui alimente le condensateur sont $e_{Th} = \frac{1}{2}e(t)$ et $R_{Th} = 2R$. La loi des mailles donne alors :

$$e_{Th} = R_{Th}i + u$$

soit encore, compte tenu que $i = \frac{dq}{dt} = C\frac{du}{dt}$:

$$\frac{1}{2}e(t) = 2RC\frac{du}{dt} + u$$

Cette équation est de la forme $e_0(t) = \tau\frac{du}{dt} + u$ si on pose :

$$\boxed{e_0(t) = \frac{1}{2}e(t) = \frac{E_0}{2}\sin(\omega t + \varphi)}$$

17. Et d'autre part :

$$\boxed{\tau = 2RC}$$

homogène à un temps.

18. En régime forcé u(t) a même pulsation que e(t) et est donc de la forme $u_0(t) = U_0 \sin(\omega t + \psi)$. L'équation différentielle obtenue à la question 16 est linéaire et à coefficients constants, on peut donc utiliser le formalisme complexe et écrire $u_0(t) = \Im m\{\underline{u}_0(t)\} = \Im m\{\underline{U}_0 \exp(j\omega t)\}$. En reportant la solution complexe dans l'équation différentielle il vient :

$$\frac{\underline{E}_0}{2} = \underline{U}_0[1 + j\omega\tau]$$

On en déduit aisément :

$$\boxed{U_0 = |\underline{U}_0| = \frac{E_0}{2\sqrt{1+\omega^2\tau^2}}}$$

19. Par ailleurs $\psi = \arg \underline{U}_0 = \arg \underline{E}_0 - \arg(1 + j\omega\tau)$, soit :

$$\boxed{\psi = \varphi - \arctan(\omega\tau)}$$

20. La solution générale de l'équation différentielle obtenue à la question 16 est la somme :

♦ de la solution de l'équation homogène, $u_1(t) = K\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$;

♦ de la solution particulière correspondant au régime forcé, $u_0(t) = U_0 \sin(\omega t + \psi)$.

La constante K est déterminée à partir des conditions initiales, à savoir $u(0^+) = u(0^-) = 0$ car il y a continuité de la tension aux bornes d'un condensateur. Il en résulte que $K = -U_0 \sin\psi$ donc :

$$u(t) = U_0\left[\sin(\omega t + \psi) - \sin\psi \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right]$$

Pour que le régime forcé s'établisse instantanément il faut que $\psi = 0$ ce qui implique :

$$\boxed{\varphi = \arctan(\omega\tau)}$$

Électrocinétique (bis).

21. La loi des noeuds se traduit, en utilisant le formalisme complexe, par $\underline{i}_3 = \underline{i}_1 + \underline{i}_2$, soit encore :

$$\underline{I}_3 = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 = I_1 \exp(j\varphi_1) + I_2 \exp(j\varphi_2)$$

Or $\varphi_2 = 0$ car i_2 - intensité du courant dans le résistor de résistance R - est en phase avec la tension e. On en déduit la valeur efficace du courant total :

$$\boxed{I_3 = |\underline{I}_3| = \sqrt{I_1^2 + I_2^2 + 2I_1I_2\cos\varphi_1}}$$

22. La puissance moyenne, sur une période, absorbée par le moteur est :

$$\mathcal{P}_M = \frac{1}{2}\Re e\{\underline{e}.\underline{i}_1{}^*\} = EI_1\cos\varphi_1 = EI_1\frac{\left[I_3^2-\left(I_1^2+I_2^2\right)\right]}{2I_1I_2}$$

Compte tenu que $I_2 = \dfrac{E}{R}$ il vient :

$$\boxed{\mathcal{P}_M = \frac{R}{2}\left[I_3^2 - \left(I_1^2 + \frac{E^2}{R^2}\right)\right] = 1691\,W}$$

23. La puissance moyenne, sur une période, fournie par le générateur est :

$$\mathcal{P}_g = \frac{1}{2}\Re e\{\underline{e}.\underline{i}_3{}^*\} = \frac{1}{2}\Re e\{\underline{e}.\left(\underline{i}_1+\underline{i}_2\right)^*\}$$

soit :

$$\boxed{\mathcal{P}_g = \frac{E^2}{R} + \mathcal{P}_M = 5491\,W}$$

24. La puissance moyenne précédente peut aussi s'écrire $\mathcal{P}_g = EI_3\cos\varphi_3$ d'où on déduit le facteur de puissance de l'installation :

$$\boxed{\cos\varphi_3 = \frac{\mathcal{P}_g}{EI_3} = 0{,}9633}$$

25. On branche un condensateur, de capacité C, aux bornes du moteur. La loi des noeuds s'écrit alors $\underline{i}'_3 = \underline{i}_1 + \underline{i}_2 + \underline{i}_c$. En choisissant convenablement la valeur de C on amène i'$_3$ en phase avec e. Dans ce cas il vient :

$$I'_3 = I_1\exp\left(j\varphi_1\right) + I_2 + jC\omega E$$

En identifiant les parties imaginaires, compte tenu que $\varphi_1 < 0$ (moteur = dipôle inductif), on obtient :

$$0 = -I_1\left|\sin\varphi_1\right| + C\omega E$$

d'où on tire :

$$\boxed{C = \frac{I_1}{\omega E}\left|\sin\varphi_1\right| = \frac{I_1}{2\pi f E}\sqrt{1-\left(\frac{\mathcal{P}_M}{EI_1}\right)^2} = 33{,}7\,\mu F}$$

Électrostatique.

26. La distribution de charges est invariante par translation parallèlement au plan yOz donc le champ électrostatique et le potentiel ne dépendent que de la variable x, **E** = **E**(x) et V = V(x). D'autre part, tout plan orthogonal à yOz est plan de symétrie ; **E**, vecteur vrai, est donc tel que :

$$\boxed{\mathbf{E} = E(x)\mathbf{u}_x}$$

Enfin, yOz étant aussi plan de symétrie, E(x) et V(x) vérifient les relations suivantes :

$$\boxed{V(-x) = V(x), E(-x) = -E(x)}$$

Ainsi, V(x) est une fonction paire et E(x) une fonction impaire de x. Notons, par ailleurs, que les symétries précédentes impliquent que le champ électrostatique est nul en tout point du plan yOz.

27. Pour tout point intérieur à la distribution, |x| < a, l'expression locale du théorème de Gauss s'écrit $\dfrac{dE_1(x)}{dx} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$. Cette relation s'intègre en $E_1(x) = \dfrac{\rho x}{\varepsilon_0} + K$. Comme $E_1(0) = 0$, la constante K est nulle, d'où :

$$\boxed{\mathbf{E}_1(x) = \frac{\rho x}{\varepsilon_0}\mathbf{u}_x}$$

28. Pour tout point extérieur à la distribution, |x| > a, l'expression locale du théorème de Gauss devient $\frac{dE_2(x)}{dx} = 0$, soit $E_2(x) = K'$. Cette constante est déterminée par la continuité du champ en x = a, soit :

$$\mathbf{E}_2(x) = \frac{\rho a}{\varepsilon_0}\mathbf{u}_x \text{ pour } x > a$$

Par symétrie on en déduit :

$$\mathbf{E}_2(x) = -\frac{\rho a}{\varepsilon_0}\mathbf{u}_x \text{ pour } x < -a$$

En résumé on peut écrire :

$$\boxed{\mathbf{E}(x) = \begin{cases} \dfrac{\rho x}{\varepsilon_0}\mathbf{u}_x \text{ pour } |x| < a \\ \dfrac{\rho a}{\varepsilon_0}\operatorname{sgn}(x)\mathbf{u}_x \text{ pour } |x| > a \end{cases}}$$

29. On obtient le potentiel en intégrant l'équation locale $\mathbf{E} = -\nabla V$ qui donne $-\frac{dV(x)}{dx} = E(x)$. Pour |x| < a, compte tenu que $V_1(0) = V_0$, on obtient :

$$\boxed{V_1(x) = -\frac{\rho x^2}{2\varepsilon_0} + V_0}$$

30. Pour |x| > a, compte tenu de la continuité du potentiel en x = ±a, il vient :

$$\boxed{V_2(x) = \frac{\rho a}{\varepsilon_0}\left(-|x| + \frac{a}{2}\right) + V_0}$$