EPL - SESSION 2003
CORRIGÉ

Électrocinétique : régime sinusoïdal.

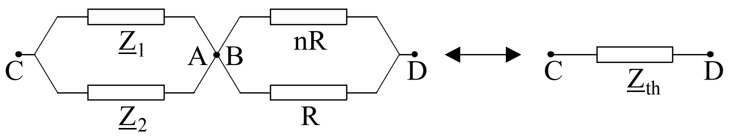
1. On a $\underline{E}_{th} = \underline{V}_D - \underline{V}_C = \left(\underline{V}_D - \underline{V}_A\right) - \left(\underline{V}_C - \underline{V}_A\right)$ avec :

$$\underline{V}_D - \underline{V}_A = -nR\underline{I}_2 = -\frac{n}{n+1}\underline{E} \quad , \quad \underline{V}_C - \underline{V}_A = -\underline{Z}_1\underline{I}_1 = -\frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}\underline{E}$$

On en déduit aisément :

$$\underline{E}_{th} = \frac{\underline{Z}_1 - n\underline{Z}_2}{(n+1)\left(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2\right)}\underline{E}$$

2. On détermine $\underline{Z}_{th}$ en court-circuitant le générateur de tension ; ainsi $\underline{V}_A = \underline{V}_B$ ce qui nous conduit à l'équivalence ci-dessous.



On en déduit :

$$\underline{Z}_{th} = \frac{nR}{n+1} + \frac{\underline{Z}_1\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}$$

3. On est en présence d'un montage type ***pont de Robinson***. Dans la branche ACB on a :

$$\underline{Z}_1 = R_1 + \frac{1}{jC_1\omega} \quad , \quad \underline{Y}_2 = \frac{1}{\underline{Z}_2} = \frac{1}{R_2} + jC_2\omega$$

Le pont est en équilibre pour la pulsation $\omega = \omega_0$ telle que $\underline{E}_{th}(\omega_0) = 0$. Le résultat de la question **1** nous conduit à :

$$n = \underline{Y}_2\underline{Z}_1 = \left(\frac{R_1}{R_2} + \frac{C_2}{C_1}\right) + j\left(R_1C_2\omega_0 - \frac{1}{R_2C_1\omega_0}\right)$$

En identifiant parties réelles et imaginaires on obtient respectivement :

$$n = \frac{R_1}{R_2} + \frac{C_2}{C_1} \quad , \quad \omega_0^2 = \frac{1}{R_1R_2C_1C_2}$$

4. Si $C_2 = 2C_1$ alors, avec $n = 4$, il vient $R_1 = 2R_2$ d'où la fréquence à l'équilibre du pont :

$$N_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi R_1C_1} = 6{,}37\,\mathrm{kHz}$$

Électrostatique et magnétostatique.

5. Toute rotation autour de l'axe Oz - support du fil - et toute translation parallèlement à cet axe laisse le système invariant donc $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\rho)$ où ρ est la distance du fil au point considéré.
Par ailleurs, tout plan contenant l'axe Oz et tout plan orthogonal à Oz sont plans de symétrie pour la distribution de charge ; $\mathbf{E}$, vecteur vrai, appartient à ces plans donc le champ électrostatique est radial, soit $\mathbf{E} = E(\rho)\mathbf{u}_\rho$.
Le théorème de Gauss appliqué à la surface fermée Σ, cylindre d'axe Oz, de rayon ρ et de hauteur unité, conduit à :

$$2\pi\,\rho\,E(\rho) = \frac{\lambda_1}{\varepsilon_0}$$

On en déduit :

$$\boxed{\mathbf{E}(\mathrm{M}) = \frac{\lambda_1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\rho}\mathbf{u}_\rho}$$

6. Considérons un élément du fil (2), de longueur dz, entourant le point P $\left(\mathbf{OP} = d\,\mathbf{u}_y + z\,\mathbf{u}_z\right)$ et portant la charge électrique dq = $\lambda_2$dz. Cet élément subit, de la part du champ électrostatique créé par le fil (1), une force :

$$d\mathbf{F}_e = dq\,\mathbf{E}(P) = \frac{\lambda_1\lambda_2}{2\pi\varepsilon_0 d}dz\,\mathbf{u}_y$$

On en déduit la résultante des forces qu'exercent les charges du fil (1) sur l'unité de longueur du fil (2) :

$$\boxed{\mathbf{f}_e = \frac{d\mathbf{F}_e}{dz} = \frac{\lambda_1\lambda_2}{2\pi\varepsilon_0 d}\mathbf{u}_y}$$

7. Soit un élément du fil (2), de longueur dx, entourant le point M $\left(\mathbf{OM} = d\,\mathbf{u}_y + x\,\mathbf{u}_x\right)$ et portant la charge électrique dq = $\lambda_2$dx. Cet élément subit, de la part du champ électrostatique créé par le fil (1), une force élémentaire :

$$d\mathbf{F}'_e = \frac{\lambda_1\lambda_2}{2\pi\varepsilon_0}\frac{dx}{\sqrt{x^2+d^2}}\mathbf{u}_\rho = \frac{\lambda_1\lambda_2}{2\pi\varepsilon_0}\frac{dx\left(\sin\theta\,\mathbf{u}_x + \cos\theta\,\mathbf{u}_y\right)}{\sqrt{x^2+d^2}}$$

La symétrie du problème implique que $\mathbf{F'}_e = F'_e\mathbf{u}_y$ avec, compte tenu que $\cos\theta = \dfrac{d}{\sqrt{x^2+d^2}}$:

$$F'_e = 2\frac{\lambda_1\lambda_2 d}{2\pi\varepsilon_0}\int_0^{h/2}\frac{dx}{x^2+d^2} = \frac{\lambda_1\lambda_2}{\pi\varepsilon_0}\int_0^{h/2}\frac{d(x/d)}{(x/d)^2+1} = \frac{\lambda_1\lambda_2}{\pi\varepsilon_0}\arctan\left(\frac{h}{2d}\right)$$

En définitive la force exercée par le fil (1) sur le segment [AB] du fil (2) est :

$$\boxed{\mathbf{F'}_e = \frac{\lambda_1\lambda_2}{\pi\varepsilon_0}\arctan\left(\frac{h}{2d}\right)\mathbf{u}_y}$$

8. On a $\lim\limits_{h\to\infty}\arctan\left(\dfrac{h}{2d}\right) = \dfrac{\pi}{2}$, d'où la résultante des forces exercées par le fil (1) sur le fil (2) illimité :

$$\boxed{\mathbf{F''}_e = \frac{\lambda_1\lambda_2}{2\varepsilon_0}\mathbf{u}_y}$$

Dans les deux cas envisagés aux questions 6 et 7 les fils chargés se repoussent car $\lambda_1\lambda_2 > 0$.

9. Toute rotation autour de l'axe Oz – support du fil – et toute translation parallèlement à cet axe laisse le système invariant donc **B** = **B**(ρ) où ρ est la distance du fil au point considéré. Par ailleurs, tout plan contenant l'axe Oz est plan de symétrie pour la distribution de courant ; **B**, pseudo-vecteur, est orthogonal à ces plans donc orthoradial et s'écrit **B** = B(ρ)$\mathbf{u}_\varphi$. Le théorème d'Ampère appliqué à un contour circulaire $\mathcal{C}$ d'axe Oz (*ligne de champ*), de rayon ρ, conduit à :

$$2\pi\rho\,B(\rho) = \mu_0 I_1$$

On en déduit :

$$\boxed{\mathbf{B}(\mathrm{M}) = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi\rho}\mathbf{u}_\varphi}$$

10. L'élément de courant $I_2 d\boldsymbol{\ell} = I_2 dz\,\mathbf{u}_z$ subit, de la part du champ magnétique créé par le fil (1), une force élémentaire :

$$d\mathbf{F}_m = I_2 d\boldsymbol{\ell}\wedge\mathbf{B}_1(\mathrm{M}) = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d}dz\,\mathbf{u}_y$$

d'où la force par unité de longueur du fil (2) :

$$\boxed{d\mathbf{f}_m = \frac{d\mathbf{F}_m}{dz} = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d}\mathbf{u}_y}$$

11. Si les deux fils sont orthogonaux on a :

$$d\mathbf{F'}_m = (I_1 dx\,\mathbf{u}_x) \wedge [B_1(-\cos\theta\,\mathbf{u}_x + \sin\theta\,\mathbf{u}_y)] = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}\frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+d^2}}\mathbf{u}_z$$

Par intégration on en déduit aisément :

$$\boxed{\mathbf{F'}_m = \mathbf{0}}$$

Résultat que l'on peut aussi obtenir à partir des symétries du système.

12. Si le fil (2) est infini le résultat de la question précédente reste valable donc :

$$\boxed{\mathbf{F''}_m = \mathbf{0}}$$

Électronique.

13. Le montage proposé correspond à une structure de ***Sallen-Key***.
L'A.O. est idéal et en régime linéaire donc $i_+ = i_- = 0$ et $V_+ = V_-$ avec $V_+ = V_A$ et $V_- = V_s$.
On applique le théorème de Millman en A puis en B ce qui nous donne respectivement :

$$\underline{V}_A = \frac{\underline{V}_B}{1 + jC\omega} = \underline{V}_s \quad , \quad \underline{V}_B = \frac{\underline{V}_e + (1 + jC'R\omega)\underline{V}_s}{2 + jC'R\omega}$$

De ces deux relations on déduit aisément l'expression de la transmittance :

$$\boxed{\underline{T}(j\omega) = \frac{\underline{V}_s}{\underline{V}_e} = \frac{1}{1 + 2jCR\omega - CC'R^2\omega^2}}$$

14. Le module de cette transmittance vaut $|\underline{T}(j\omega)| = \dfrac{1}{\sqrt{1 + 2C(2C - C')R^2\omega^2 + (CC'R^2)^2\omega^4}}$ et on veut qu'elle s'écrive $|\underline{T}(j\omega)| = \dfrac{1}{\sqrt{1 + (\omega/\omega_0)^4}}$. Pour cela il faut que :

$$\boxed{C' = 2C \quad \text{et} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{2}CR}}$$

15. Numériquement on obtient :

$$\boxed{C' = 0{,}2\mu F \quad , \quad N_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\sqrt{2}\pi RC} = 1{,}13\text{kHz}}$$

16. Par définition $G(dB) = 20\log|\underline{T}|$. Il en résulte que :

- ♦ $\lim\limits_{\omega\to 0}|\underline{T}| = 1$ donc G(dB) = 0 aux basses fréquences ;
- ♦ $\lim\limits_{\omega\to\infty}|\underline{T}| = \left(\dfrac{\omega_0}{\omega}\right)^2$ donc $G(dB) = 40(\log\omega_0 - \log\omega)$ aux hautes fréquences.

17. On est en présence d'un ***filtre passe-bas*** dont la pulsation de coupure, à –3 dB, est $\omega_c = \omega_0$.

Mécanique du point.

18. B décrit un demi-cercle, de centre I et de rayon b, à la vitesse angulaire ω. La durée du mouvement est donc :

$$\boxed{T = \frac{\pi}{\omega}}$$

19. Dans le triangle isocèle OIB on a $\omega t + 2\left(\dfrac{\pi}{2} - \varphi\right) = \pi$ d'où :

$$\boxed{\varphi = \frac{1}{2}\omega t}$$

Par ailleurs :

$$\boxed{\rho = 2b\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = 2b\sin\left(\frac{\omega t}{2}\right)}$$

20. Le triangle AOB est rectangle en O donc $\sin\alpha = \frac{\rho}{2b} = \sin\left(\frac{\omega t}{2}\right)$ soit :

$$\boxed{\alpha = \frac{\omega t}{2}}$$

Ainsi, la barre en appui sur l'axe Oz à l'instant initial se retrouve sur l'axe Oy à la fin du mouvement.

21. On a **OJ** = b**u** avec $\mathbf{u} = \sin\alpha\left(\cos\varphi\,\mathbf{i} + \sin\varphi\,\mathbf{j}\right) + \cos\mathbf{k}$ d'où on déduit :

$$\boxed{\begin{gathered} X = b\sin\alpha\cos\varphi = b\sin\left(\frac{\omega t}{2}\right)\cos\left(\frac{\omega t}{2}\right) = \frac{b}{2}\sin(\omega t) \\ Y = b\sin\alpha\sin\varphi = b\sin^2\left(\frac{\omega t}{2}\right) = \frac{b}{2}\left[1 - \cos(\omega t)\right] \\ Z = b\cos\alpha = b\cos\left(\frac{\omega t}{2}\right) \end{gathered}}$$

22. ||**OJ**|| = b = Cte donc J appartient à la sphère de centre O et de rayon b.
La projection de J dans le plan xOy décrit le demi-cercle d'équation :

$$X^2 + \left(Y - \frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

J appartient donc au cylindre de génératrice parallèle à Oz et de directrice le demi-cercle de centre I et de rayon b/2.

23. On a $v^2 = \dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + \dot{Z}^2 = \left(\frac{b\omega}{2}\right)^2\left[1 + \sin^2\left(\frac{\omega t}{2}\right)\right]$ d'où la valeur moyenne temporelle :

$$\boxed{\left\langle v^2 \right\rangle = \frac{3}{8}b^2\omega^2}$$

24. On a $|v| = \frac{b\omega}{2}\sqrt{1 + \sin^2\left(\frac{\omega t}{2}\right)}$ fonction croissante du temps sur l'intervalle [0,T] : le mouvement est donc accéléré.

Optique géométrique.

25. Le système est afocal si :

$$-\infty \xrightarrow{L_1} F'_1 \xrightarrow{L_2} F_3 \xrightarrow{L_3} +\infty$$

Il faut donc que F_3 soit le conjugué image de F'_1 à travers la lentille L_2.
La relation de conjugaison des Descartes :

$$-\frac{1}{\overline{O_2F'_1}} + \frac{1}{\overline{O_2F_3}} = \frac{1}{f'_2}$$

avec $\overline{O_2F'_1} = \overline{O_2O_1} + \overline{O_1F'_1} = -e_1 + f'_1$ et $\overline{O_2F_3} = \overline{O_2O_3} + \overline{O_3F_3} = e_3 - f'_3$ nous donne :

$$\boxed{\frac{1}{f'_2} = \frac{1}{e_1 - f'_1} + \frac{1}{e_3 - f'_3}}$$

26. Si F'_1 coïncide avec O_2 alors O_2 est son propre conjugué à travers L_2 donc $O_2 = F_3$ ce qui implique :

$$\boxed{e_3 = f'_3}$$

27. Grandissements transversal et angulaire du système sont tels que :

$$\boxed{\gamma = \frac{1}{G} = -\frac{f'_3}{f'_1} = -\frac{3}{4}}$$

28. On a $A \xrightarrow{L_1} A_1 \xrightarrow{L_2} A_2 \xrightarrow{L_3} A'$. En utilisant les formules de conjugaison de Newton et de Descartes il vient :

$$\overline{F_1A}.\overline{F'_1\,A_1} = -f'^2_1 \rightarrow \overline{O_2A_1} = -\frac{f'^2_1}{x}$$

$$-\frac{1}{\overline{O_2A_1}} + \frac{1}{\overline{O_2A_2}} = \frac{1}{f'_2}$$

$$\overline{F_3A_2}.\overline{F'_3\,A'} = -f'^2_3 \rightarrow \overline{O_2A_2} = -\frac{f'^2_3}{x'}$$

On en déduit :

$$x' = \left(\frac{f'_3}{f'_1}\right)^2 \frac{1}{f'_2}\left(f'_2\,x - f'^2_1\right)$$

soit avec les valeurs numériques proposées :

$$\boxed{x' = \frac{9}{16f'_2}\left(f'_2\,x - 16\right)}$$

29. On veut que F'_3 soit l'image de O_1 ce qui impose $x = f'_1 = 4$ cm et $x' = 0$. Il faut donc que :

$$\boxed{f'_2 = 4\text{cm}}$$

30. Dans les conditions de la question 28 les grandissements transversaux des trois lentilles sont tels que :

$$\boxed{\gamma_1 = \frac{f'_1}{\overline{F_1A}} = \frac{4}{x}}$$

Par ailleurs $\gamma_2 = \dfrac{\overline{O_2A_2}}{\overline{O_2A_1}} = \left(-\dfrac{f'^2_3}{x'}\right)\left(-\dfrac{x}{f'^2_1}\right)$ avec $x' = \dfrac{9}{16}\left(x-4\right)$ ce qui nous donne :

$$\boxed{\gamma_2 = \frac{x}{x-4}}$$

Enfin :

$$\boxed{\gamma_3 = -\frac{\overline{F'_3\,A'}}{f'_3} = -\frac{x'}{f'_3} = -\frac{3}{16}\left(x-4\right)}$$