EPL - SESSION 2004
CORRIGÉ

Optique géométrique.

1. Par définition la vergence (*qui s'exprime en dioptrie*) d'un miroir sphérique plongé dans un milieu transparent isotrope et homogène d'indice n est :

$$\boxed{V = -\frac{2n}{\overline{SC}}}$$

2. Les foyers objet et image, F et F', sont confondus avec le milieu du segment [SC].

3. Si n = 1 on a :

♦ formule de conjugaison avec origine au sommet S du miroir : $\frac{1}{\overline{SA}} + \frac{1}{\overline{SA'}} = \frac{2}{\overline{SC}} = -V$;

♦ grandissement transversal : $G = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = -\frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}}$.

De ces deux relations on déduit :

$$\boxed{V = -\frac{1}{\overline{SA}}\left(1 - \frac{1}{G}\right) = -0{,}4\delta}$$

car $\overline{SA} = -10\text{m}$ (*objet réel*) et $G = \frac{1}{5}$ (*image droite et plus petite que l'objet*).

4. V < 0 donc le miroir est divergent et convexe. D'ailleurs, seul un tel miroir peut donner, d'un objet réel, une image réduite et droite (exemple : *un rétroviseur de voiture*).

5. On rappelle que pour un miroir sphérique :

♣ les ***plans principaux*** - plans conjugués de grandissement transversal +1 - sont confondus avec le plan orthogonal en S à l'axe optique du miroir ;

♣ les ***plans antiprincipaux*** - plans conjugués de grandissement transversal −1 - sont confondus avec le plan orthogonal en C à l'axe optique du miroir ;

♣ les ***points nodaux*** - points conjugués sur l'axe optique de grandissement angulaire +1 - sont confondus en C ;

♣ les ***points antinodaux*** - points conjugués sur l'axe optique de grandissement angulaire −1 - sont confondus en S.

Ainsi, un objet placé dans le plan orthogonal à l'axe optique du miroir en C conduit à une image située dans le même plan.

6. Dans ce cas on a G = −1 par définition des plans antiprincipaux.

Électrocinétique : régime sinusoïdal.

7. Le dipôle AB présente une impédance complexe :

$$\underline{Z}_{AB} = jL\omega + \frac{R}{1 + jCR\omega}$$

Ce dipôle sera équivalent à une résistance pure R_{eq} si $\Im m\{\underline{Z}_{AB}\} = 0$, soit si :

$$\boxed{L = \frac{R^2 C}{1 + R^2 C^2 \omega^2}}$$

8. Numériquement on obtient L = 120 mH.

9. Dans ce cas $\underline{Z}_{AB} = R_{eq} = \dfrac{R}{1+R^2C^2\omega^2}$ d'où la valeur efficace I de l'intensité du courant qui traverse la bobine (*c'est aussi l'intensité du courant principal*) :

$$\boxed{I = \frac{E_0}{R_{eq}} = \left(1+R^2C^2\omega^2\right)\frac{E_0}{R} = 5\text{A}}$$

10. On a :

$$\underline{U}_{AD} = jL\omega\underline{I} \quad , \quad \underline{U}_{DB} = \underline{Z}_{DB}\underline{I} = \frac{R\underline{I}}{1+jCR\omega}$$

On en déduit les valeurs efficaces des tensions :

$$\boxed{U_{AD} = L\omega I = 240\text{V} \quad , \quad U_{DB} = \frac{RI}{\sqrt{1+R^2C^2\omega^2}} = 300\text{V}}$$

11. On a $\underline{U}_{DB} = R\underline{I}_1 = \dfrac{\underline{I}_2}{jC\omega}$ d'où les valeurs efficaces des courants :

$$\boxed{I_1 = \frac{U_{DB}}{R} = 3\text{A} \quad , \quad I_2 = C\omega U_{DB} = 4\text{A}}$$

12. Le dipôle AB étant équivalent à une résistance pure E et I sont en phase. La puissance moyenne consommée par le dipôle est donc :

$$\boxed{\mathcal{P} = \frac{1}{2}\Re e\{\underline{E}.\underline{I}^*\} = E_0 I = 900\text{W}}$$

Statique des fluides.

13. Si on néglige la masse volumique de l'air devant celle de l'eau, l'équilibre de la cloche se traduit, à l'aide du théorème d'Archimède, par :

$$\underbrace{mg}_{\text{poids de la cloche}} = \underbrace{\rho g S(h-H)}_{\text{poids du liquide déplacé}}$$

On en déduit la hauteur h de la partie immergée du récipient :

$$\boxed{h = \frac{m}{\rho S} + H}$$

14. D'après la loi fondamentale de l'hydrostatique :

$$p_1 - p_0 = \rho g(h-H) = \frac{mg}{S}$$

Par ailleurs, l'air étant assimilé à un gaz parfait on a, d'après la loi de Mariotte (*évolution supposée isotherme*) :

$$p_1 V_1 = p_0 V_0 = p_0 S H_0$$

De ces deux relations on tire l'expression du volume d'air emprisonné dans la cloche à l'équilibre :

$$\boxed{V_1 = \frac{p_0 S^2 H_0}{p_0 S + mg}}$$

15. La pression de l'air dans la cloche est :

$$\boxed{p_1 = p_0 + \frac{mg}{S}}$$

16. On fait varier la quantité d'air emprisonné dans la cloche mais sa pression finale est toujours égale à sa pression initiale car la cloche reste en équilibre à la température ambiante. Ainsi :

$$\boxed{p_2 = p_1 = p_0 + \frac{mg}{S}}$$

17. La pression étant uniforme dans tout le volume d'air on a d'après la loi fondamentale de l'hydrostatique :

$$p_2 - p_0 = \rho g \frac{V_2}{S}$$

Avec le résultat de la question 16 on en déduit le nouveau volume d'air emprisonné :

$$\boxed{V_2 = \frac{m}{\rho}}$$

18. V_M est atteint à l'équilibre limite c'est-à-dire lorsque la partie supérieure de la cloche affleure juste la surface libre de l'eau dans la cuve. Cet équilibre se traduit par :

$$mg + \rho_0 g V_M = \rho g H_0 S$$

d'où :

$$\boxed{V_M = \frac{\rho S H_0 - m}{\rho_0}}$$

Thermodynamique.

19. Le système est fermé et isolé ; le bilan énergétique se traduit donc par :

$$\Delta U = \Delta U_1 + \Delta U_2 = 0$$

Or les gaz, supposés parfaits, suivent la première loi de Joule, soit :

$$n_1 c_V (T_f - T_1) + n_2 c_V (T_f - T_2) = 0$$

d'où la température finale du mélange :

$$\boxed{T_f = \frac{n_1 T_1 + n_2 T_2}{n_1 + n_2}}$$

T_f apparaît comme le "barycentre" de T_1 et T_2 affectés des coefficients n_1 et n_2.

20. Le volume final est $V_f = V_1 + V_2$. Puisqu'on suppose que le mélange se comporte comme un gaz parfait on a, en utilisant l'équation d'état :

$$\frac{(n_1 + n_2) T_f}{p_f} = \frac{n_1 T_1}{p_1} + \frac{n_2 T_2}{p_2}$$

Compte tenu de l'expression de T_f il vient :

$$\boxed{p_f = p_1 p_2 \frac{n_1 T_1 + n_2 T_2}{n_1 T_1 p_2 + n_2 T_2 p_1}}$$

21. On a $\dfrac{V_f}{RT_f} = \dfrac{p_f}{n_1 + n_2} = \dfrac{p_{1f}}{n_1} = \dfrac{p_{2f}}{n_2}$, d'où les pressions partielles :

$$\boxed{p_{1f} = \frac{n_1}{n_1 + n_2} p_f \quad , \quad p_{2f} = \frac{n_2}{n_1 + n_2} p_f}$$

Ce résultat est évidemment en accord avec la loi de Dalton : $p_f = p_{1f} + p_{2f}$.

22. On considère le cas où $n_1 = n_2 = 1$ qui impose $p_{f1} = p_{f2} = p_f/2$. Pour calculer la variation d'entropie du système on imagine des chemins réversibles pour chacun des gaz entre leurs états extrêmes.

$$\Delta S_{11} = \int_{T_1}^{T_f} c_p \frac{dT}{T} - R \int_{p_1}^{p_{f1}} \frac{dp}{p} = c_p \ln\left(\frac{T_f}{T_1}\right) + R \ln\left(\frac{p_1}{p_f}\right) + R \ln 2$$

$$\Delta S_{12} = \int_{T_2}^{T_f} c_p \frac{dT}{T} - R \int_{p_2}^{p_{f2}} \frac{dp}{p} = c_p \ln\left(\frac{T_f}{T_2}\right) + R \ln\left(\frac{p_2}{p_f}\right) + R \ln 2$$

Le bilan entropique du système conduit alors à :

$$\boxed{\Delta S_{(1)} = \Delta S_{11} + \Delta S_{12} = c_p \ln\left(\frac{T_f^2}{T_1 T_2}\right) + R \ln\left(\frac{p_1 p_2}{p_f^2}\right) + 2R \ln 2}$$

On vérifie aisément que $\Delta S_{(1)} = S^{p}_{(1)} > 0$ pour cette évolution adiabatique et irréversible. Le terme 2Rln2 correspond à ce que l'on appelle l'entropie de mélange.

23. On considère maintenant le cas où $T_1 = T_2 = T_0$, $p_1 = p_2 = p_0$ et $n_1 = n_2 = 1$ qui entraîne $T_f = T_0$ et $p_f = p_0/2$. On obtient dans ce cas :

$$\boxed{\Delta S_{(2)} = 2R\ln 2 > 0}$$

24. On a toujours $T_1 = T_2 = T_0$ et $p_1 = p_2 = p_0$. Par ailleurs les molécules qui remplissent chaque compartiment sont identiques. La non discernabilité des molécules entraîne (*voir paradoxe de Gibbs*) :

$$\boxed{\Delta S_{(3)} = 0}$$

Mécanique du point.

25. En l'absence de frottements il y a conservation de l'énergie mécanique, soit :

$$\frac{1}{2}mV_P^2 - mgr\cos\theta = mg(h-r)$$

d'où :

$$\boxed{V_P = \sqrt{2g\left[h - r(1-\cos\theta)\right]}}$$

26. On applique la deuxième loi de Newton au point matériel dans le référentiel lié au support et supposé galiléen, soit :

$$m\mathbf{a}(P/\mathcal{R}) = \mathbf{R} + m\mathbf{g}$$

avec :

- $\mathbf{a}(P/\mathcal{R}) = \dfrac{dV_P}{dt}\tau + \dfrac{V_P^2}{r}\mathbf{n}$, où $\mathbf{n} = \dfrac{\mathbf{PC}}{\|\mathbf{PC}\|}$, car le mouvement est circulaire ;
- $\mathbf{R} = R\mathbf{n}$ $(R > 0)$ en l'absence de frottements.

En projection suivant **n** et compte tenu du résultat de la question précédente on en déduit :

$$\boxed{R(\theta) = \frac{mg}{r}\left[2h - 2r + 3r\cos\theta\right]}$$

27. Pour que le point matériel puisse atteindre A il faut que $R(\pi) \geq 0$ soit $2h - 5r \geq 0$ qui impose :

$$\boxed{h \geq h_m = \frac{5}{2}r}$$

28. Dans ce cas :

$$\boxed{R_I = R(0) = \frac{mg}{r}(2h_m + r) = 6mg}$$

29. Toujours dans l'hypothèse où $h = h_m$ la vitesse du point matériel P en A est alors :

$$\boxed{V_A = V_P(\pi) = \sqrt{2g(h_m - 2r)} = \sqrt{gr}}$$

30. Quand P quitte le support il subit uniquement l'action de la pesanteur et décrit une ***parabole osculatrice*** en A à l'arc de cercle de diamètre [AI]. Si on prend l'origine du temps à l'instant où P quitte son support, les équations paramétriques de la trajectoire sont :

$$x = V_A t + x_C \quad , \quad y = -\frac{1}{2}gt^2 + 2r$$

d'où l'équation cartésienne :

$$y = 2r - \frac{g}{2}\left(\frac{x - x_C}{V_A}\right)^2$$

Cette trajectoire coupe l'axe Ox en $M(x_0 < x_C , y_0 = 0)$ tel que :

$$\boxed{x_0 = x_C - 2V_A\sqrt{\frac{r}{g}} = x_C - 2r}$$