EPL - SESSION 2005
CORRIGÉ

Mécanique du point : expérience de Millikan.

1. En l'absence de champ électrique **E**, une gouttelette sphérique est soumise à :

♦ son poids $m\mathbf{g} = -\frac{4}{3}\pi R^3 \rho_h g\, \mathbf{e}_z$;

♦ la poussée d'Archimède $\mathbf{\Pi} = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_a g\, \mathbf{e}_z$;

♦ la force de frottement visqueux (*formule de Stokes*) $\mathbf{f} = -6\pi\eta R v\, \mathbf{e}_z$.

La deuxième loi de Newton appliquée à la gouttelette dans le référentiel, supposé galiléen, lié au condensateur s'écrit :

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = m\mathbf{g} + \mathbf{f} + \mathbf{\Pi}$$

On en déduit, en projection suivant $\mathbf{e}_z$, l'équation différentielle du mouvement :

$$\frac{dv}{dt} + \frac{9}{2}\frac{\eta}{\rho_h R^2}v = \left(\frac{\rho_a}{\rho_h} - 1\right)g$$

Avec la condition initiale v(0) = 0 cette équation s'intègre en :

$$v(t) = -\frac{2R^2 g}{9\eta}(\rho_h - \rho_a)\left[1 - \exp\left(-\frac{9\eta}{2\rho_h R^2}t\right)\right]$$

Si on pose $\tau = \frac{2\rho_h R^2}{9\eta}$, durée caractéristique du mouvement de la gouttelette, il vient :

$$\boxed{\mathbf{v}(t) = -\frac{2R^2 g}{9\eta}(\rho_h - \rho_a)\left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right]\mathbf{e}_z}$$

2. La gouttelette atteint, théoriquement au bout d'un temps infini, une vitesse limite :

$$\boxed{\lim_{t \to +\infty} |v(t)| = v_0 = \frac{2R^2 g}{9\eta}(\rho_h - \rho_a)}$$

Compte tenu de la valeur de la vitesse limite donnée dans la question suivante on obtient $\tau = 20{,}4\mu s$. Ainsi cette vitesse limite sera atteinte, à 10^{-3} prés, au bout d'une durée $t = 3\tau\ln(10) = 1{,}4ms$; donc, à notre échelle de temps, de manière quasi instantanée.

3. A partir de la mesure de la vitesse limite on détermine le rayon de la gouttelette soit :

$$\boxed{R = \sqrt{\frac{9\eta v_0}{2g(\rho_h - \rho_a)}} = 1{,}13.10^{-6}\,m}$$

4. La norme du champ électrique uniforme et la différence de potentiel entre les armatures du condensateur sont liées par la relation :

$$\boxed{U = Ed}$$

5. Quand la gouttelette est immobilisée elle est en équilibre sous l'action de son poids et de la force électrique, soit : $m\mathbf{g} + (-q)\mathbf{E} = \mathbf{0}$. On en déduit la valeur absolue de la charge de la gouttelette :

$$\boxed{q = \frac{4\pi}{3}\frac{\rho_h R^3 g d}{U} = 4{,}8.10^{-19}\,C}$$

La charge q est donc égale à un nombre entier de fois (ici n = 3) la charge élémentaire e.

Électrocinétique : régime sinusoïdal.

6. On peut écrire : $\underline{V}_s = \underline{V}_A - \underline{V}_B = (\underline{V}_A - \underline{V}_C) + (\underline{V}_C - \underline{V}_B)$.

Les deux résistances R étant identiques on a : $\underline{V}_C - \underline{V}_B = \dfrac{\underline{V}_C - \underline{V}_D}{2} = \dfrac{\underline{V}_e}{2}$.

D'autre part le même courant traverse la capacité C et la résistance r qui constituent un diviseur de tension. On a donc : $\underline{V}_C - \underline{V}_A = \dfrac{jrC\omega}{1 + jrC\omega}\underline{V}_e$.

On en déduit alors aisément la fonction de transfert :

$$\boxed{\underline{T}_1(j\omega) = \frac{\underline{V}_s}{\underline{V}_e} = \frac{1 - jrC\omega}{2(1 + jrC\omega)}}$$

Notons que : $\underline{E}_{Th} = (\underline{V}_s)_{i_s=0} = \dfrac{1 - jrC\omega}{2(1 + jrC\omega)}\underline{V}_e$ représente l'amplitude complexe de la f.é.m. du générateur de Thévenin équivalent au circuit du point de vue de ses bornes de sortie A et B.

7. On obtient l'impédance interne $\underline{Z}_{Th}$ du générateur de Thévenin équivalent au circuit du point de vue de ses bornes de sortie A et B en éteignant la source $v_e(t)$. Il en résulte le schéma ci-contre d'où on déduit :

$$\boxed{\underline{Z}_{Th} = \frac{R}{2} + \frac{r}{1 + jrC\omega}}$$

8. Le déphasage de la tension de sortie par rapport à la tension d'entrée est :

$$\varphi_1 = \arg(\underline{T}_1(j\omega)) = \arg\left(\frac{1 - jrC\omega}{2(1 + jrC\omega)}\right)$$

Or, les nombres complexes $(1 - jrC\omega)$ et $(1 + jrC\omega)$, conjugués, ont des arguments opposés. Il vient alors :

$$\boxed{\varphi_1 = 2\arg(1 - jrC\omega) = -2\arctan(rC\omega)}$$

9. Avec $\omega = 10^3$ rad.s^{-1} et C = 1 μF on aura $\varphi_1 = -\dfrac{\pi}{2}$ si on donne à r la valeur r_0 telle que :

$$\boxed{r_0 = \frac{1}{C\omega} = 10^3\,\Omega}$$

10. On remplace le montage en pont par son générateur de Thévenin équivalent dans l'hypothèse où $r = r_0$. Dans ce cas le même courant traverse la résistance $R_u = \dfrac{R}{2}$ et l'impédance $\underline{Z}_{Th}$ qui constituent un diviseur de tension. Compte tenu que $r_0 = \dfrac{1}{C\omega} = R$ on a donc :

$$\underline{V}_s = \frac{\underline{E}_{Th}}{1 + \dfrac{2\underline{Z}_{Th}}{R}} = \frac{1 - 3j}{20}\underline{V}_e$$

Il en résulte que la tension de sortie présente, par rapport à la tension d'entrée, un déphasage :

$$\boxed{\varphi'_1 = \arg(1 - 3j) = -\arctan 3 = -71{,}6°}$$

11. On considère que l'A.O. est idéal $(i_+ = i_- = 0)$ et fonctionne en régime linéaire $(v_+ = v_-)$. On applique le théorème de Millman respectivement aux entrées inverseuse et non inverseuse, soit :

$$\underline{V}_- = \frac{1}{R_1 + R_2}\left(\frac{\underline{V}_e}{R_2} + \frac{\underline{V}_s}{R_1}\right) \quad , \quad \underline{V}_+ = \frac{\underline{V}_e}{1 + jrC\omega}$$

On en déduit la fonction de transfert du montage :

$$\boxed{\underline{T}_2(j\omega) = \frac{\underline{V}_s}{\underline{V}_e} = \frac{R_1 - jrR_2C\omega}{R_1(1 + jrC\omega)}}$$

12. Pour que $\left|\underline{T}_2(j\omega)\right| = 1$ il faut que numérateur et dénominateur soient des nombres complexes conjugués. Cette condition sera remplie si :

$$\boxed{R_1 = R_2}$$

13. Dans ce cas on a : $\underline{T}_2(j\omega) = \dfrac{\underline{V}_s}{\underline{V}_e} = \dfrac{1 - jrC\omega}{1 + jrC\omega}$. Il en résulte que la tension de sortie présente, par rapport à la tension d'entrée, un déphasage :

$$\boxed{\varphi_2 = 2\arg(1 - jrC\omega) = -2\arctan(rC\omega)}$$

Ce montage constitue un ***déphaseur pur***.

Optique géométrique.

14. En utilisant les formule de Descartes il vient :

$$-\frac{1}{\overline{O_1A_o}} + \frac{1}{\overline{O_1A_i}} = \frac{1}{f_1} \quad , \quad G_t = \frac{\overline{A_iB_i}}{\overline{A_oB_o}} = \frac{\overline{O_1A_i}}{\overline{O_1A_o}}$$

Par élimination de $\overline{O_1A_i}$ entre ces deux relations on obtient :

$$\boxed{\overline{O_1A_o} = f_1\left(\frac{1}{G_t} - 1\right) = -20\text{cm}}$$

L'objet, réel, se trouve donc dans le plan focal image de la lentille divergente.

15. La position de l'image est telle que :

$$\boxed{\overline{O_1A_i} = G_t\,\overline{O_1A_o} = -10\text{cm}}$$

Elle est donc ***droite et virtuelle***.

16. L'image virtuelle $\overline{A_iB_i}$ donnée par L_1 sert d'objet réel pour L_2 qui en donne une image réelle nette sur l'écran. De la relation de conjugaison de Descartes :

$$-\frac{1}{\overline{O_2A_i}} + \frac{1}{\overline{O_2E}} = \frac{1}{f_2}$$

on déduit, compte tenu que $\overline{O_2E} = 2f_2$:

$$\overline{O_2A_i} = \overline{O_2O_1} + \overline{O_1A_i} = \frac{f_2\,\overline{O_2E}}{\overline{O_2E} - f_2} = 2f_2$$

Il en résulte que :

$$\boxed{\overline{O_1O_2} = 70\text{cm}}$$

Remarque. $\overline{O_2E} = 2f_2$ *montre que l'écran est dans le plan antiprincipal image de* L_2. *Pour observer une image nette sur cet écran il faut que l'objet* $\overline{A_iB_i}$ *se trouve dans le plan antiprincipal objet de* L_2 *soit* $\overline{O_2A_i} = -2f_2$. *On en déduit évidemment* $\overline{O_1O_2} = 70\text{cm}$. *Notons que dans cette géométrie le grandissement transversal dû à la lentille convergente est, par définition des plans antiprincipaux,* $G'_t = -1$.

17. Le système (L_1, L_2) doit être ***afocal*** soit $F_{i1} = F_{o2}$. La distance entre les centres optiques des deux lentilles est alors :

$$\boxed{\overline{O_1O_2} = \overline{O_1F_{i1}} + \overline{F_{o2}O_2} = f_1 + f_2 = 20\text{cm}}$$

18. Le grandissement d'un système afocal est $G_t = -\dfrac{f_2}{f_1}$ donc le rapport des diamètres des faisceaux émergent et incident est tel que :

$$\boxed{\frac{D}{d} = -\frac{f_2}{f_1} = 2}$$

Thermodynamique : pompe à chaleur.

19. Au cours d'un cycle élémentaire réversible la machine fonctionne en pompe à chaleur si elle :
♦ prélève de la chaleur à une source froide, $\delta Q_f > 0$ (transformation isotherme D → C) ;
♦ cède de la chaleur à une source chaude, $\delta Q_c < 0$ (transformation isotherme B → A).
Le cycle doit donc être parcouru dans le sens ADCBA. L'aire algébrique de la surface limitée par le cycle orienté représente l'opposé du travail reçu par l'agent thermique ; ici $\delta W > 0$.

Au cours du premier cycle élémentaire réversible les deux premiers principes de la thermodynamique conduisent à écrire :

$$\delta Q_c + \delta Q_f < 0 \rightarrow |\delta Q_c| > \delta Q_f \quad , \quad \frac{\delta Q_c}{T(0)} + \frac{\delta Q_f}{T_{ext}} = 0 \rightarrow |\delta Q_c| = \frac{T(0)}{T_{ext}} \delta Q_f$$

Ces relations sont vérifiées si $T(0) > T_{ext}$.

20. Au cours d'un cycle élémentaire réversible on a, d'après les deux principes de la thermodynamique :

$$\delta W = -(\delta Q_c + \delta Q_f) \quad , \quad \delta Q_f = -\frac{T_{ext}}{T(t)} \delta Q_c$$

On en déduit :

$$\delta W = -\frac{T(t) - T_{ext}}{T(t)} \delta Q_c$$

d'où l'efficacité thermique de la pompe :

$$\boxed{\eta(t) = \frac{-\delta Q_c}{\delta W} = \frac{T(t)}{T(t) - T_{ext}} > 1}$$

21. Pendant la durée dt d'un cycle élémentaire l'agent thermique :
♦ reçoit un travail $\delta W = \mathcal{P}\, dt$;
♦ cède une quantité de chaleur $-\delta Q_c = C\, dT$.

L'efficacité de la pompe étant définie par $\eta(t) = \frac{-\delta Q_c}{\delta W} = \frac{T(t)}{T(t) - T_{ext}}$ on en déduit l'équation différentielle qui régit l'évolution de la température de la pièce au cours du temps :

$$\frac{dT(t)}{dt} - \frac{\mathcal{P}}{C} \frac{T(t)}{T(t) - T_{ext}} = 0$$

Avec la condition initiale $T(0) = T_0$ cette équation différentielle s'intègre en :

$$t = \frac{C}{\mathcal{P}} \left[T(t) - T_0 - T_{ext} \ln\left(\frac{T(t)}{T_0} \right) \right]$$

Ainsi, la température T_1 sera atteinte à l'instant t_1, compté à partir de l'instant origine, tel que :

$$\boxed{t_1 = \frac{C}{\mathcal{P}} \left[T_1 - T_0 - T_{ext} \ln\left(\frac{T_1}{T_0} \right) \right]}$$

22. Dans l'hypothèse d'un chauffage direct de la pièce on a : $\mathcal{P}\, dt = C\, dT$. Dans ce cas la température T_1 sera atteinte à l'instant t_2, compté à partir de l'instant origine, tel que :

$$\boxed{t_2 = \frac{C}{\mathcal{P}} (T_1 - T_0) > t_1}$$

La pompe à chaleur présente donc un intérêt évident pour chauffer un local. Effectivement, pour une puissance dépensée identique, la pompe à chaleur apporte une quantité de chaleur η fois plus grande à la source chaude qu'un chauffage direct.

23. On suppose qu'à l'instant où la température de la pièce est $T_1 = 295$ K on arrête la pompe à chaleur ; cet instant sera pris comme nouvelle origine du temps.
Entre deux instants voisins, t et t + dt, la température du local varie de $dT < 0$ ce qui correspond, en supposant la pression constante, à une variation d'enthalpie : $dH = C\, dT$. Pendant la même durée l'enthalpie reçue à travers la paroi du local est : $\delta H_r = \delta Q = -kC(T(t) - T_{ext})dt$.

Le bilan énergétique nous conduit à l'équation différentielle :

$$\frac{dT(t)}{dt} + k\left(T(t) - T_{ext}\right) = 0$$

Compte tenu que $T(0) = T_1$ cette équation s'intègre en :

$$T(t) = T_{ext} + \left(T_1 - T_{ext}\right)\exp(-kt)$$

On en déduit la constante k, homogène à l'inverse d'un temps :

$$\boxed{k = \frac{1}{t}\ln\left(\frac{T_1 - T_{ext}}{T - T_{ext}}\right) = \frac{1}{10{,}8.10^3}\ln\left(\frac{5}{2}\right) = 84{,}8.10^{-6}\,s^{-1}}$$

24. On reprend la même démonstration qu'à la question 21 mais ici la quantité de chaleur cédée à la source chaude est : $-\delta Q_c = C\,dT - kC\left(T(t) - T_{ext}\right)dt$.

On en déduit l'équation différentielle :

$$\frac{dT(t)}{dt} + k\left(T(t) - T_{ext}\right) - \frac{\mathcal{P}}{C}\frac{T(t)}{T(t) - T_{ext}} = 0$$

La température de la pièce atteint sa valeur maximale T_{max} lorsque, au bout d'un certain temps, un régime stationnaire s'installe. L'énergie thermique apportée par la pompe sert alors uniquement à compenser les pertes par fuite thermique qui augmentent avec l'écart de température entre le local et le milieu extérieur. Dans ce cas l'équation différentielle précédente se réduit à :

$$k\left(T_{max} - T_{ext}\right) - \frac{\mathcal{P}}{C}\frac{T_{max}}{T_{max} - T_{ext}} = 0$$

soit encore :

$$\boxed{T_{max}^2 - 2\left(T_{ext} + \frac{\mathcal{P}}{2kC}\right)T_{max} + T_{ext}^2 = 0}$$

Électrostatique.

25. La charge électrique totale du noyau est :

$$\boxed{Q = \rho_0 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta \int_0^{a}\left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)r^2 dr = \frac{8\pi\rho_0 a^3}{15}}$$

C'est d'ailleurs la seule solution homogène proposée.

26. Le champ électrique **E**, ***vecteur vrai***, appartient aux plans de symétrie de la distribution de charge et est orthogonal aux plans d'antisymétrie de cette même distribution. Ainsi, dans le cas proposé, on a $\mathbf{E}(P) = E(r)\mathbf{u}_r$: le champ électrique est radial et ne dépend que de la distance r = OP du centre de la distribution au point considéré.

27. A l'extérieur de la distribution, c'est-à-dire pour r > a, tout se passe comme si on avait une charge ponctuelle Q placée en O. Il en résulte donc un champ électrique :

$$\boxed{\mathbf{E}_{ext}(P) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^3}\mathbf{r} = \frac{2\rho_0 a^3}{15\varepsilon_0 r^3}\mathbf{r}}$$

28. A l'intérieur de la distribution on applique le théorème de Gauss sur une surface sphérique Σ de centre O et de rayon r < a. Il vient :

$$4\pi r^2 E_{int}(r) = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi}\sin\theta\, d\theta \int_0^{r}\left(1 - \frac{r'^2}{a^2}\right)r'^2\, dr' = 4\pi\frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\left(\frac{r^3}{3} - \frac{r^5}{5a^2}\right)$$

On en déduit :

$$\boxed{\mathbf{E}_{int}(P) = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\left(\frac{1}{3} - \frac{r^2}{5a^2}\right)\mathbf{r}}$$

Notons que le champ électrique est continu en r = a compte tenu de l'absence de charges superficielles.

29. Champ et potentiel sont liés par $\mathbf{E} = -\nabla V$, soit pour r > a : $\mathbf{E}_{ext}(r) = -\frac{dV_{ext}(r)}{dr}\frac{\mathbf{r}}{r}$. Compte tenu de la condition aux limites $\lim\limits_{r\to+\infty} V_{ext}(r) = 0$, on en déduit par intégration :

$$\boxed{V_{ext}(P) = \frac{2\rho_0 a^3}{15\varepsilon_0 r}}$$

30. On effectue le même raisonnement pour r < a ce qui nous donne par intégration :

$$V_{int}(P) = -\frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\left(\frac{r^2}{6} - \frac{r^4}{20a^2}\right) + K'$$

On détermine la constante K' en utilisant la continuité du potentiel en r = a, d'où $K' = \frac{\rho_0 a^2}{4\varepsilon_0}$. En définitive il vient :

$$\boxed{V_{int}(P) = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\left(\frac{a^2}{4} - \frac{r^2}{6} + \frac{r^4}{20a^2}\right)}$$

Magnétostatique.

31. Tous les plans contenant l'axe Oz sont plans d'antisymétrie pour la distribution de courant. Le champ magnétique **B**, ***pseudo vecteur***, appartient à ces plans donc à leur intersection. Il en résulte qu'en tout point M de l'axe Oz, **B**(M) est porté par cet axe.

Le plan xOy est plan de symétrie pour la distribution de courant. **B**(P) est alors orthogonal à ce plan en tout point P de celui-ci.

32. C'est un résultat classique du cours, soit :

$$\boxed{\mathbf{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2R}\sin^3\alpha\,\mathbf{e}_z}$$

33. On a $(z_M - z)\tan\alpha = R$ qui nous donne, en prenant sa dérivée logarithmique :

$$\frac{d\alpha}{\tan\alpha\cos^2\alpha} - \frac{dz}{z_M - z} = 0$$

On en déduit aisément :

$$\boxed{dz = \frac{z_M - z}{\tan\alpha}\frac{d\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{R}{\sin^2\alpha}d\alpha}$$

34. Si on note n le nombre de spires par unité de longueur on a $n = \frac{N}{L}$ d'où le nombre de spires contenues dans un élément de longueur dz de solénoïde :

$$\boxed{dN = n\,dz = \frac{N}{L}dz}$$

35. L'élément de longueur dz de solénoïde peut être considéré comme une spire circulaire plane de rayon R, centrée à la cote z et parcourue par le courant d'intensité $di = I\,dN$. Elle crée donc en M le champ magnétique élémentaire :

$$d\mathbf{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2R}\sin^3\alpha\,dN\,\mathbf{e}_z = \frac{\mu_0 NI}{2L}\sin\alpha\,d\alpha\,\mathbf{e}_z$$

On obtient, par intégration, le champ magnétique total créé en ce point par le solénoïde, soit :

$$\boxed{\mathbf{B}(M) = \frac{\mu_0 NI}{2L}(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2)\mathbf{e}_z}$$

36. Pour un solénoïde infini, comportant $n = \frac{N}{L}$ spires circulaires par unité de longueur, on a $\alpha_1 = 0$ et $\alpha_2 = \pi$. On en déduit :

$$\boxed{\mathbf{B}_\infty(\mathrm{M}) = \mu_0 n I \, \mathbf{e}_z}$$

Le champ magnétique est uniforme à l'intérieur du solénoïde infini et nul à l'extérieur. C'est un résultat qui fait partie des connaissances de base de la magnétostatique.