EPL - SESSION 2006
CORRIGÉ

Mécanique du point : problème de Képler.

1. μ est la masse réduite du système telle que :

$$\boxed{\mu = \left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)^{-1} = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}}$$

2. Le problème à deux corps se réduit, dans le référentiel du centre de masse $\mathcal{R}^*$, à l'étude du mouvement d'un point matériel fictif A, de masse μ, de rayon vecteur $\mathbf{r} = \mathbf{CA}$, soumis à la seule force centrale et newtonienne $\mathbf{F} = -\mathcal{G}\, m_1 m_2 \dfrac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|^3}$ qui dérive de l'énergie potentielle $\mathcal{E}_p = -\mathcal{G}\dfrac{m_1 m_2}{r}$. Ainsi, au cours du mouvement de A, il y a conservation de l'énergie mécanique et du moment cinétique de A en C.

3. Le mouvement de A s'effectue dans le plan $(C,\mathbf{e}_x,\mathbf{e}_y)$. Son vecteur vitesse, en coordonnées polaires, est $\mathbf{v}(A/\mathcal{R}^*) = \dot{r}\,\mathbf{e}_r + r\,\dot{\varphi}\,\mathbf{e}_\varphi$, d'où l'expression de l'énergie cinétique $\mathcal{E}_k = \dfrac{\mu}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right)$.

On en déduit son énergie mécanique :

$$\boxed{\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_k + \mathcal{E}_p = \frac{\mu}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right) - \mathcal{G}\frac{m_1 m_2}{r}}$$

4. La conservation du moment cinétique de A en C dans $\mathcal{R}^*$ se traduit par : $L_z = \mu r^2 \dot{\varphi} = \text{Cte}$. D'autre part on a : $\dot{r} = \dot{\varphi}\dfrac{dr(\varphi)}{d\varphi}$. On peut donc écrire l'expression de l'énergie cinétique de A dans $\mathcal{R}^*$ sous la forme :

$$\boxed{\mathcal{E}_k = \frac{\mu}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right) = \frac{L_z^2}{2\mu r^2}\left(1 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2\right)}$$

5. On introduit la fonction $u(\varphi) = \dfrac{1}{r(\varphi)}$. Dans ce cas il vient :

$$\mathcal{E}_m = \frac{L_z^2}{2\mu}\left(u^2 + \left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2\right) - \mathcal{G}\, m_1 m_2 u = \text{Cte}$$

En dérivant cette relation par rapport à φ on obtient, après simplification par $\dfrac{du}{d\varphi} \neq 0$:

$$\boxed{\frac{d^2u(\varphi)}{d\varphi^2} + u(\varphi) = \mathcal{G}\frac{\mu\, m_1 m_2}{L_z^2} = \frac{1}{p}}$$

La résolution de cette équation différentielle conduit à l'expression de la trajectoire de A dans $\mathcal{R}^*$.

6. Dans ce cas l'expression de l'énergie mécanique devient :

$$\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_k + \mathcal{E}_p = \frac{m_1}{2}v^2 - \mathcal{G}\frac{m_1 m_2}{r}$$

La vitesse de libération v_ℓ est la vitesse minimale pour laquelle l'état est libre : l'orbite est donc parabolique et l'énergie mécanique nulle. Cette vitesse, à l'altitude h au-dessus du sol terrestre est alors :

$$\boxed{v_\ell = \sqrt{2\mathcal{G}\frac{m_2}{R_T + h}} \approx 10{,}8\,\text{km.s}^{-1}}$$

Électronique : pseudo-intégrateur.

7. L'AO est supposé parfait $(i_+ = i_- = 0)$ et fonctionne en régime linéaire $(v_+ = v_-)$.

En régime continu établi le montage se comporte comme un ***amplificateur inverseur*** de tension dont le facteur d'amplification est :

$$\boxed{A_0 = -\frac{R_2}{R_1} = -1,2}$$

8. L'entrée non inverseuse est directement liée à la masse donc $v_+ = 0$. Comme $v_+ = v_-$, le théorème de Millman appliqué à l'entrée inverseuse nous donne :

$$\left(\frac{1}{R_2} + jC\omega\right)\underline{u}_s + \frac{\underline{u}_e}{R_1} = 0$$

On en déduit la fonction de transfert du montage :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{u}_s}{\underline{u}_e} = -\frac{R_2 / R_1}{1 + jCR_2\omega}$$

C'est la fonction de transfert caractéristique d'un ***filtre passe-bas*** du premier ordre fondamental de fréquence de coupure à −3 dB :

$$\boxed{f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi R_2 C} \approx 1895\text{Hz}}$$

9. L'amplitude de la tension de sortie est telle que :

$$\boxed{u_{s,m} = |\underline{H}| u_{e,m} = \frac{R_2}{R_1}\frac{u_{e,m}}{\sqrt{1+(f/f_0)^2}} \approx 3,3\text{V}}$$

10. Si on écrit $\underline{H}(j\omega) = |\underline{H}|\exp(j\varphi(\omega))$ alors $\varphi(\omega) = \arg\underline{H}(j\omega)$ représente l'avance de phase de la sortie par rapport à l'entrée.

Dans le cas du montage proposé il vient :

$$\boxed{\varphi(\omega) = \arg\underline{H}(j\omega) = \pi - \arg\left(1 + j\frac{f}{f_0}\right) = \pi - \arctan\left(\frac{f}{f_0}\right) \approx 110°}$$

La tension de sortie est donc en ***avance*** de 110° par rapport à la tension d'entrée.

11. L'intensité instantanée du courant de sortie de l'AO est telle que :

$$\underline{i}_s = \frac{\underline{u}_s}{R_3} - \frac{\underline{u}_e}{R_1} = \left(1 + \frac{R_2}{R_3} + j\frac{f}{f_0}\right)\frac{\underline{u}_s}{R_2}$$

Son amplitude est donc :

$$\boxed{i_{s,m} = \sqrt{\left(1+\frac{R_2}{R_3}\right)^3 + \left(\frac{f}{f_0}\right)^2}\,\frac{u_{s,m}}{R_2} \approx 2,7\text{mA}}$$

12. Pour $f = 50\text{kHz} \gg f_0 = 1895\text{Hz}$ on a $\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{u}_s}{\underline{u}_e} \approx -\frac{1}{jCR_1\omega}$ soit $u_s = -\frac{1}{R_1 C}\int u_e\,dt$: le montage se comporte comme un ***intégrateur***. Si la tension d'entrée est une tension créneau alors la tension de sortie sera de forme triangulaire.

Électrostatique : modèle d'atome d'hydrogène.

13. La charge électrique contenue dans le volume sphérique de centre O et de rayon R est :

$$Q(R) = e + \int_0^R \rho_0 \exp\left(-\frac{2r}{a_0}\right)\left(4\pi r^2 dr\right)$$

En effectuant le changement de variable $x = \dfrac{2r}{a_0}$ il vient :

$$Q(R) = e + 4\pi\rho_0 \left(\frac{a_0}{2}\right)^3 \int_0^{2R/a_0} x^2 \exp(-x)\,dx$$

Il en résulte que

$$\boxed{Q(R) = e + \pi\rho_0 a_0^3 - \pi\rho_0 a_0^3 \left(2\left(\frac{R}{a_0}\right)^2 + \frac{2R}{a_0} + 1\right)\exp\left(-\frac{2R}{a_0}\right)}$$

14. Un atome est électriquement neutre soit :

$$\boxed{\lim_{R\to\infty} Q(R) = e + \pi\rho_0 a_0^3 = 0}$$

On en déduit :

$$\boxed{\rho_0 = -\frac{e}{\pi a_0^3}}$$

15. Les propriétés de symétrie de cette distribution de charge impliquent que $\mathbf{E} = E_r(r)\mathbf{u}_r$; on peut alors appliquer le théorème de Gauss sur une surface sphérique de centre O et de rayon r, soit :

$$4\pi r^2 E_r(r) = \frac{Q(r)}{\varepsilon_0} = \frac{e}{\varepsilon_0}\left(1 + \frac{2r}{a_0} + 2\left(\frac{r}{a_0}\right)^2\right)\exp\left(-\frac{2r}{a_0}\right)$$

On en déduit :

$$\boxed{E_r(r) = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\left(1 + \frac{2r}{a_0} + 2\left(\frac{r}{a_0}\right)^2\right)\exp\left(-\frac{2r}{a_0}\right)}$$

Notons que $\lim\limits_{r\to 0^+} E_r(r) = \dfrac{e}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$, cohérent avec le modèle développé.

16. Potentiel et champ électrostatiques sont liés par la relation locale $\mathbf{E} = -\nabla V$ soit $E_r(r) = -\dfrac{dV(r)}{dr}$ qui se traduit par :

$$\frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\left(1 + \frac{2r}{a_0} + 2\left(\frac{r}{a_0}\right)^2\right)\exp\left(-\frac{2r}{a_0}\right) = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\left(1 + \frac{2r}{a_0} + 2K\frac{r^2}{a_0}\right)\exp\left(-\frac{2r}{a_0}\right)$$

On en déduit par identification :

$$\boxed{K = \frac{1}{a_0}}$$

Il en résulte que $V(r) = \dfrac{e}{4\pi\varepsilon_0 r}\left(1 + \dfrac{r}{a_0}\right)\exp\left(-\dfrac{2r}{a_0}\right)$.

17. L'électron se déplace sur une trajectoire circulaire, de rayon a_0 et de centre O, sous la seule action de la force électrostatique $\mathbf{F} = -\dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 a_0^2}\mathbf{u}_r$ exercée par le proton supposé fixe en O dans $\mathcal{R}$ galiléen.

La deuxième loi de Newton appliqué à l'électron dans $\mathcal{R}$ nous conduit à $m\dfrac{v^2}{a_0} = \dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 a_0^2}$ d'où l'énergie cinétique de la particule :

$$\mathcal{E}_K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 a_0}$$

D'autre part, la force électrostatique dérive de l'énergie potentielle :

$$\mathcal{E}_p = -\int \mathbf{F}.\mathbf{dr} = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 a_0}$$

L'énergie mécanique de l'électron, donc de l'atome, est :

$$\boxed{\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_K + \mathcal{E}_p = -\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 a_0}}$$

18. Expérimentalement on mesure $\mathcal{E}_m = -13,6\text{eV} \approx -2,2.10^{-18}\,\text{J}$: énergie de l'atome d'hydrogène dans son état fondamental. On en déduit le rayon orbital :

$$\boxed{a_0 = \frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 |\mathcal{E}_m|} \approx 53\text{pm}}$$

Transformations d'un gaz parfait.

19. La capacité thermique massique à volume constant est définie par $c_V = \frac{C_V}{m} = \frac{1}{m}\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V$. On obtient ainsi, pour ce gaz parfait monoatomique :

$$\boxed{c_V = \frac{3}{2}\frac{nR}{m} = \frac{3}{2}\frac{R}{M} = 3,12\text{kJ.K}^{-1}.\text{kg}^{-1}}$$

20. Le gaz subit une détente isotherme réversible. La loi de Mariotte, pV = Cte, nous permet de déterminer la pression du gaz dans l'état final, soit :

$$\boxed{p_2 = p_1\frac{V_1}{V_2} = \frac{m}{M}\frac{RT_1}{V_2} = 2,49.10^6\,\text{Pa}}$$

21. Au cours de cette évolution isotherme le gaz reçoit un travail :

$$\boxed{W_{12} = -\int_{(1)}^{(2)} p.dV = -\frac{m}{M}RT_1\int_{V_1}^{V_2}\frac{dV}{V} = -\frac{m}{M}RT_1\ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) = -571\text{kJ}}$$

Notons que ce gaz parfait, obéissant à la première loi de Joule $(U = U(T))$, reçoit, au cours de cette détente isotherme, une quantité de chaleur : $Q_{12} = -W_{12} = 571\text{kJ}$.

22. Lors d'une évolution isentropique (*adiabatique et réversible*) d'un gaz parfait, température et volume sont liés par la formule de Laplace : $T.V^{\gamma-1} = \text{Cte}$. Par ailleurs, pour un gaz parfait monoatomique on a : $\gamma = 1 + \frac{nR}{mc_V} = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$. On en déduit la température de l'hélium en fin de détente isentropique :

$$\boxed{T_3 = T_1\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1} = T_1\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{2/3} = 326\text{K}}$$

23. Au cours du chauffage isochore (*évolution* $(3)\to(2)$) le gaz ne reçoit aucun travail $(W_{32} = 0)$. Par contre lors de la détente isentropique l'hélium reçoit, d'après le premier principe de la thermodynamique et la première loi de Joule, le travail :

$$W_{13} = \Delta U_{13} = mc_v(T_3 - T_1) = \frac{3}{2}\frac{mR}{M}(T_3 - T_1) = -427\text{kJ}$$

En définitive le travail total reçu par le gaz au cours des évolutions successives $(1)\to(3)\to(2)$ est :

$$\boxed{W_{132} = W_{13} + W_{32} = -427\text{kJ}}$$

24. L'entropie du gaz est une fonction d'état, sa variation entre l'état (1) et l'état (2) est donc telle que :

$$\Delta S = \Delta S_{13} + \Delta S_{32}$$

Or $\Delta S_{13} = 0$ car l'évolution est isentropique.
Pour l'évolution isochore on a :

$$\Delta S_{32} = \int_{(3)}^{(2)} \frac{\delta Q_{32}}{T} = \int_{(3)}^{(2)} \frac{dU_{32}}{T} = \frac{3}{2}\frac{mR}{M}\int_{T_3}^{T_2}\frac{dT}{T} = \frac{3}{2}\frac{mR}{M}\ln\left(\frac{T_2}{T_3}\right) = 952\,\mathrm{J.K^{-1}}$$

En définitive :

$$\boxed{\Delta S = \Delta S_{13} + \Delta S_{32} = 952\,\mathrm{J.K^{-1}}}$$

Électron en mouvement dans les champs E et B.

25. La deuxième loi de Newton appliqué à l'électron, soumis au seul champ électrique $\mathbf{E} = E\mathbf{e}_x$, dans le référentiel du laboratoire $\mathcal{R}$ supposé galiléen, se traduit par :

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = q\mathbf{E}$$

Elle s'intègre, compte tenu des conditions initiales $\mathbf{OM}(0) = \mathbf{0}$ et $\mathbf{v}(0) = v_0\mathbf{e}_z$, en :

$$\mathbf{OM}(t) = x(t)\mathbf{e}_x + z(t)\mathbf{e}_z = \frac{qE}{2m}t^2\,\mathbf{e}_x + v_0 t\,\mathbf{e}_z$$

Le mouvement de l'électron s'effectue dans le plan xOz. L'équation cartésienne de la trajectoire de l'électron est alors :

$$x = \frac{qE}{2mv_0^2}z^2$$

C'est un arc de parabole de sommet O, d'axe Ox et de concavité tournée vers les x négatifs car $q < 0$.
La particule entre en contact avec l'écran à l'abscisse x_e telle que :

$$\boxed{x_e = \frac{qE}{2mv_0^2}z_0^2 = -3{,}5\,\mathrm{cm}}$$

26. L'électron est soumis maintenant au seul champ magnétique $\mathbf{B} = B\mathbf{e}_y$; la force de Lorentz se réduit alors à $\mathbf{F} = q(\mathbf{v}\wedge\mathbf{B})$.

Le théorème de la puissance cinétique, $\dfrac{dK(M/\mathcal{R})}{dt} = \mathbf{F}.\mathbf{v} = 0$, montre que l'énergie cinétique de l'électron, donc sa vitesse, reste constante au cours du temps.
Des conditions initiales, $\mathbf{OM}(0) = \mathbf{0}$, $\mathbf{v}(0) = v_0\mathbf{e}_z$ et $\mathbf{F}(0) = -qv_0B\mathbf{e}_x = |q|v_0B\mathbf{e}_x$, il résulte que le mouvement de l'électron s'effectue dans le plan xOz. Par ailleurs sa vitesse étant constante, l'accélération tangentielle est nulle. Ainsi, la deuxième loi de Newton appliquée à l'électron dans $\mathcal{R}$ nous conduit à :

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{mv_0^2}{\overline{R}}\mathbf{e}_n = q\left((v_0\,\mathbf{e}_t)\wedge\mathbf{B}\right) = -qv_0B\,\mathbf{e}_n$$

On en déduit le rayon de la trajectoire circulaire :

$$\boxed{R = \left|\overline{R}\right| = \frac{mv_0}{|q|B} = 28{,}4\,\mathrm{cm}}$$

27. La trajectoire de l'électron est portée par le cercle de centre C (R,0) et d'équation $(x-R)^2 + z^2 = R^2$.
La particule entrera en contact avec l'écran à l'abscisse :

$$\boxed{x_m = R - \sqrt{R^2 - z_0^2} = 1{,}8\,\mathrm{cm}}$$

28. Lorsque **E** et **B** agissent simultanément l'électron sera animé d'un mouvement rectiligne uniforme dans $\mathcal{R}$, de vitesse $\mathbf{v}_0$, si la force de Lorentz est nulle, soit si dès l'instant initial :

$$\mathbf{F}(0) = q(\mathbf{E} + \mathbf{v}_0\wedge\mathbf{B}) = q(E - v_0B)\mathbf{e}_x = \mathbf{0}$$

Il faut donc que :

$$B = \frac{E}{v_0} = 2\text{mT}$$

29. La deuxième loi de Newton appliqué à l'électron dans $\mathcal{R}$ se traduit par :

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = q\left(\mathbf{E} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}\right)$$

Elle donne en projection sur les axes Ox et Oz (*mouvement dans le plan xOz*), et en posant $\omega_c = \frac{qB}{m}$ (*pulsation cyclotron*) :

$$\ddot{x} = \frac{q}{m}E - \omega_c \dot{z} \quad (1) \qquad \ddot{z} = \omega_c \dot{x} \quad (2)$$

Compte tenu des conditions initiales ces relations s'intègrent en :

$$\dot{x} = \frac{q}{m}Et - \omega_c z \quad (1') \qquad \dot{z} = \omega_c x + v_0 \quad (2')$$

Par élimination de $\dot{z}$ entre (1) et (2') il vient :

$$\ddot{x} + \omega_c^2 x = \frac{q}{m}\left(E - v_0 B\right)$$

30. Si on suppose $B = \frac{2E}{v_0}$ alors l'équation différentielle précédente s'écrit :

$$\ddot{x} + \omega_c^2 x = -\frac{q}{m}E$$

Elle admet une solution générale de la forme :

$$x(t) = C\cos(\omega_c t) + D\sin(\omega_c t) - \frac{mE}{qB^2}$$

On détermine les constantes d'intégration à l'aide des conditions initiales :

$$x(0) = C - \frac{mE}{qB^2} = 0 \Rightarrow C = \frac{mE}{qB^2} \qquad \text{et} \qquad \dot{x}(0) = \omega_c D = 0 \Rightarrow D = 0$$

En définitive :

$$x(t) = \frac{mE}{qB^2}\left(\cos(\omega_c t) - 1\right)$$

Objectif photographique et projecteur de diapositives.

31. On utilise la relation de conjugaison de Descartes :

$$-\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f'_a}$$

qui nous conduit, avec $p = -3$ m, à :

$$p' = \frac{pf'_a}{p + f'_a} = 141\text{mm}$$

Notons que $f'_a = 135\text{mm}$ correspond à un téléobjectif.

32. Pour photographier le ciel on placera la pellicule photographique dans le plan focal image de l'objectif. Ainsi avec une pellicule 24x36 le champ du ciel photographié sera :

$$\arctan\left(\frac{24}{135}\right) \text{x} \arctan\left(\frac{36}{135}\right) = 10°\text{x}15°$$

33. L'appareil est pointé sur la Lune, son axe optique étant confondu avec l'axe de l'astre. Le diamètre apparent du disque lunaire vu par l'objectif de l'appareil photographique est alors :

$$\theta = \arctan\left(\frac{D}{L}\right) = \arctan\left(\frac{1740}{384.10^3}\right) \approx 0{,}26° \approx 16'$$

34. Le passage de la pellicule au tirage papier correspond à un grandissement transversal :

$$G_t = \frac{100}{24} = \frac{150}{36} = \frac{25}{6} \approx 4,2$$

Ainsi, le diamètre du disque lunaire sur le papier sera :

$$\boxed{d = G_t \theta f'_a \approx 2,6\text{mm}}$$

35. On a un grandissement transversal $G'_t = -1$ donc objet et image appartiennent aux plans antiprincipaux de la lentille mince convergente qui modélise l'objectif du projecteur de diapositives. Ces plans sont symétriques par rapport au plan de la lentille (*où sont confondus les plans principaux*) et distants de $4f'_p$. Il en résulte que :

$$\boxed{f'_p = \frac{20}{4} = 5\text{cm}}$$

Remarque. On peut aussi, évidemment, utiliser les relations de Descartes.

36. Dans ce cas le grandissement transversal est :

$$G''_t = \frac{p'}{p} = 1 - \frac{p'}{f'_p} = -89$$

On en déduit la taille de l'image sur l'écran :

$$\boxed{\left(24\left|G''_t\right|\right)\text{x}\left(36\left|G''_t\right|\right)\text{mm}^2 \approx \left(2,1\text{x}3,2\right)\text{m}^2}$$