EPL - SESSION 2008
CORRIGÉ

Pont diviseur de tension.

1. On a :

$$\underline{V}_s = \frac{1}{1+R_2\underline{Y}_p}\underline{V}_e = \frac{1}{1+R_2\left(\frac{1}{R_1}+jC\omega\right)}\underline{V}_e$$

On en déduit la fonction de transfert :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{R_1}{R_1+R_2}\frac{1}{1+j\frac{CR_1R_2}{R_1+R_2}\omega}$$

Elle peut s'écrire sous la forme proposée dans l'énoncé si on pose :

$$\boxed{T_0 = \frac{R_1}{R_1+R_2}}$$

2. Et :

$$\boxed{\omega_0 = \frac{R_1+R_2}{CR_1R_2}}$$

3. Le gain en tension est alors :

$$G_V(dB) = 20\log T_0 - 10\log\left(1+\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right) = G_{V,max} - 10\log\left(1+\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)$$

Il en résulte qu'on a une atténuation de 3 dB du signal de sortie par rapport à sa valeur maximale pour une fréquence :

$$\boxed{f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{R_1+R_2}{2\pi CR_1R_2} = 15{,}9\,\text{kHz}}$$

4. A partir de la fonction de transfert on peut écrire :

$$\left(1+j\frac{\omega}{\omega_0}\right)\underline{v}_s(t) = T_0\underline{v}_e(t)$$

Sachant qu'en régime harmonique de pulsation ω, avec la convention $\underline{z}(t)\propto\exp(j\omega t)$, on a la correspondance $\frac{d}{dt}\leftrightarrow j\omega$, on en déduit l'équation différentielle à laquelle obéit la valeur instantanée de la tension de sortie :

$$\frac{1}{\omega_0}\frac{dv_s(t)}{dt} + v_s(t) = T_0 v_e(t)$$

Cette expression est analogue à celle proposée dans l'énoncé si on pose :

$$\boxed{\tau = \frac{1}{\omega_0} = \frac{CR_1R_2}{R_1+R_2}}$$

5. Et :

$$\boxed{G_0 = T_0 = \frac{R_1}{R_1+R_2}}$$

6. La tension d'entrée est un échelon de tension d'amplitude V_0, soit $v_e(t) = V_0 Y(t)$, où Y(t) est la fonction d'Heaviside : $Y(t) = \begin{cases} 0 \text{ pour } t < 0 \\ 1 \text{ pour } t \geq 0 \end{cases}$. Ainsi, pour $t \geq 0$, l'équation différentielle obtenue à la question 4 s'écrit :

$$\tau \frac{dv_s(t)}{dt} + v_s(t) = G_0 V_0$$

Cette équation différentielle du premier ordre, à coefficients constants et avec second membre constant, admet une solution de la forme :

$$v_s(t) = K \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + G_0 V_0$$

La continuité de la tension, due à celle de la charge, aux bornes du condensateur, $v_s(0^-) = v_s(0^+) = 0$, conduit à $K = -G_0 V_0$. En définitive :

$$v_s(t) = G_0 V_0 \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right)$$

dont le représentation graphique est donnée sur la figure 1.

La loupe.

7. Les triangles homothétiques OAB et OA'B' nous permettent d'écrire : $G_t = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}$.

La relation de conjugaison de Descartes nous donne : $\frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{f'}$.

Par ailleurs, on a $\overline{OA'} = \overline{OC} + \overline{CA'} = \delta - d$.
De ces trois relations on déduit le grandissement transversal :

$$G_t = 1 - \frac{\overline{OA'}}{f'} = \frac{f' + d - \delta}{f'}$$

8. On suppose les angles θ et θ' petits donc :

$$G = \frac{\theta'}{\theta} \approx \frac{\tan\theta'}{\tan\theta} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A'C}} \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = G_t \frac{\overline{AO} + \overline{OC}}{\overline{A'C}}$$

Or, d'après la relation de conjugaison : $\overline{AO} = \frac{\overline{A'O}.f'}{f' - \overline{OA'}} = \frac{f'(d-\delta)}{f' + d - \delta}$

En définitive le grossissement de la loupe est :

$$G = \frac{f' + \delta}{f'} - \frac{\delta^2}{f'd}$$

9. Le grossissement est maximal lorsque l'observateur met au point à l'infini $(d = d_M = \infty)$.

10. Sa valeur est telle que :

$$G_{max} = 1 + \frac{\delta}{f'}$$

11. Lorsque l'observateur accommode de l'infini jusqu'à sa distance minimale de vision distincte, la loupe étant maintenue fixe, la variation du grossissement est :

$$\Delta G = G(\infty) - G(d_m) = \frac{\delta^2}{f' d_m}$$

12. On donne $\delta = \overline{OC} = 18\,\text{cm}$ et on veut que $G_{max} = 10$. Il faut donc que la distance focale image de la loupe soit telle que :

$$\boxed{f'_0 = \frac{\delta}{G_{max} - 1} = 2\,\text{cm}}$$

Satellite terrestre.

13. On est en présence d'un mouvement à force centrale. Le théorème du moment cinétique appliqué en T au satellite S dans le référentiel $\mathcal{R}_G$ nous conduit à :

$$\mathbf{L}(T, S/\mathcal{R}_G) = \mathbf{TS} \wedge m\mathbf{V}(S/\mathcal{R}_G) = \mathbf{Cte} = \mathbf{L}_0$$

La trajectoire du satellite est plane, orthogonale à $\mathbf{L}_0$, et contient le centre T de la Terre.

14. Le satellite est animé d'un mouvement circulaire uniforme de vitesse $\mathbf{V}(S/\mathcal{R}_G) = \mathbf{v}_0$, à une distance $r_0 = R + h$ du centre de la Terre. La deuxième loi de Newton appliquée à S dans $\mathcal{R}_G$ nous conduit à :

$$\frac{mv_0^2}{R+h} = \mathcal{G}\frac{mM}{(R+h)^2}$$

On en déduit :

$$\boxed{v_0 = \sqrt{\mathcal{G}\frac{M}{R+h}}}$$

15. La période de révolution du satellite est telle que :

$$\boxed{T_0 = \frac{2\pi(R+h)}{v_0} = 2\pi\sqrt{\frac{(R+h)^3}{\mathcal{G}M}}}$$

16. L'énergie mécanique du satellite sur sa trajectoire dans $\mathcal{R}_G$ est :

$$\boxed{\mathcal{E}_{mt} = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p = \frac{1}{2}mv_0^2 - \mathcal{G}\frac{mM}{R+h} = -\mathcal{G}\frac{mM}{2(R+h)}}$$

17. Un point P de la Terre Σ, situé à la latitude λ, présente, dans $\mathcal{R}_G$, une vitesse :

$$\mathbf{V}(P, \Sigma/\mathcal{R}_G) = \mathbf{\Omega}(\Sigma/\mathcal{R}_G) \wedge \mathbf{TP} = \Omega R \sin\lambda\, \mathbf{e}_\varphi$$

L'énergie mécanique du satellite lorsqu'il est immobile au sol en ce point de latitude λ est alors :

$$\boxed{\mathcal{E}_{ms} = \mathcal{E}'_c + \mathcal{E}'_p = \frac{1}{2}m\Omega^2R^2\cos^2\lambda - \mathcal{G}\frac{mM}{R}}$$

18. L'énergie nécessaire à la satellisation est donc :

$$\boxed{\mathcal{E}_{sat} = \mathcal{E}_{mt} - \mathcal{E}_{ms} = m\left[\mathcal{G}\frac{M}{R}\left(1 - \frac{R}{2(R+h)}\right) - \frac{1}{2}\Omega^2R^2\cos^2\lambda\right]}$$

Cycle de Diesel à double combustion.

19. De (1) à (2) l'air subit une transformation isentropique, la formule de Laplace, $T_m V_M^{\gamma-1} = T_2 V_m^{\gamma-1}$, nous conduit à :

$$\boxed{T_2 = T_m \beta_v^{\gamma-1} = 910\,\text{K}}$$

20. De (2) à (3) le gaz subit une transformation isochore ; la température T_3 est obtenue à partir de l'équation d'état des gaz parfaits, soit :

$$T_3 = T_2\frac{p_M}{p_2}$$

La pression p_2 est donnée par la formule de Laplace, $p_2 = p_m\beta_v^{\gamma}$, d'où en définitive :

$$\boxed{T_3 = T_2\frac{p_M}{p_m}\beta_v^{-\gamma} = 1034\,\text{K}}$$

21. La transformation de (4) à (5) est isentropique donc :

$$T_5 = T_M\left(\frac{V_4}{V_M}\right)^{\gamma-1}$$

L'évolution de (3) vers (4) étant isobare, on a $V_4 = \frac{T_M}{T_3}V_m$. Il en résulte que :

$$\boxed{T_5 = T_M\left(\frac{T_M}{\beta_v T_3}\right)^{\gamma-1} \approx 882\,\text{K}}$$

22. Au cours de la phase de combustion, c'est-à-dire entre (2) et (4), la quantité de chaleur reçue par un kilogramme d'air est :

$$Q_c = Q_{23} + Q_{34} = \Delta U_{23} + \Delta H_{34}$$

Or, un gaz parfait suit les deux lois de Joule, d'où :

$$\boxed{Q_c = \frac{R}{M(\gamma-1)}\left[(T_3 - T_2) + \gamma(T_4 - T_3)\right] = 1131\,\text{kJ.kg}^{-1}}$$

23. La quantité de chaleur reçue par un kilogramme d'air entre (5) et (1) est :

$$\boxed{Q_f = Q_{51} = \Delta U_{51} = \frac{R}{M(\gamma-1)}(T_m - T_5) = -422\,\text{kJ.kg}^{-1}}$$

24. On en déduit, à l'aide du premier principe de la thermodynamique, le travail reçu par un kilogramme d'air au cours d'un cycle, soit :

$$\boxed{W = -(Q_c + Q_f) = -709\,\text{kJ.kg}^{-1}}$$

Ce travail, négatif, est donc fourni par le gaz au milieu extérieur.

Disque uniformément chargé.

25. On considère un élément de surface du disque entourant un point P, d'aire $dS = r\,dr\,d\theta$, portant la charge électrique élémentaire $dq = \sigma\,dS = \frac{Q}{\pi a^2}dS$. Cette charge crée en $M(0,0,z>0)$ un potentiel électrostatique :

$$dV_1(z>0) = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0\|\mathbf{PM}\|} = \frac{Q}{4\pi^2\varepsilon_0 a^2}\frac{r\,dr\,d\theta}{\sqrt{r^2+z^2}}$$

Il en résulte pour tout le disque :

$$\boxed{V_1(z>0) = \frac{Q}{4\pi^2\varepsilon_0 a^2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a\frac{r\,dr}{\sqrt{r^2+z^2}} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 a}\left(\sqrt{1+\left(\frac{z}{a}\right)^2} - \frac{z}{a}\right)}$$

26. Pour un point de l'axe Oz tel que $M(0,0,z<0)$ on obtient :

$$\boxed{V_2(z<0) = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 a}\left(\sqrt{1+\left(\frac{z}{a}\right)^2} + \frac{z}{a}\right)}$$

Remarque. On peut rassembler les deux résultats précédents dans la relation :

$$V(z) = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 a}\left(\sqrt{1+\left(\frac{z}{a}\right)^2} - \frac{|z|}{a}\right)$$

27. Le champ électrique est lié au potentiel par la relation $\mathbf{E} = -\mathbf{grad}\,V$. Ainsi, le champ électrique créé en $M(0,0,z>0)$ est donné par $\mathbf{E}_1(z>0) = -\frac{dV_1(z>0)}{dz}\mathbf{e}_z$, soit :

$$\boxed{\mathbf{E}_1(z>0)=\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 a^2}\left(1-\frac{z}{\sqrt{a^2+z^2}}\right)\mathbf{e}_z}$$

28. De la même manière, on obtient pour $M(0,0,z<0)$:

$$\boxed{\mathbf{E}_2(z<0)=\frac{-Q}{2\pi\varepsilon_0 a^2}\left(1+\frac{z}{\sqrt{a^2+z^2}}\right)\mathbf{e}_z}$$

Remarque. On peut rassembler les deux résultats précédents dans la relation :

$$\mathbf{E}(z)=\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 a^2}\left(1-\frac{|z|}{\sqrt{a^2+z^2}}\right)\operatorname{sgn}(z)\mathbf{e}_z \quad \text{avec} \quad \operatorname{sgn}(z)=\begin{cases}+1 \text{ pour } z>0\\ -1 \text{ pour } z<0\end{cases}$$

29. A la traversée de la distribution, le champ électrique subit une variation :

$$\boxed{\delta\mathbf{E}=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\mathbf{E}_1(\varepsilon)-\mathbf{E}_2(-\varepsilon)\right)=\frac{Q}{\pi\varepsilon_0 a^2}\mathbf{e}_z}$$

30. On peut considérer que le champ électrique en un point de l'axe Oz résulte de la superposition du champ calculé précédemment et de celui créé par le disque de centre O, de rayon b, portant une densité superficielle de charge : $\sigma'=-\sigma=-\frac{Q}{\pi a^2}$. Il en résulte que :

$$\mathbf{E}_0(z)=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\left(1-\frac{|z|}{\sqrt{a^2+z^2}}\right)-\left(1-\frac{|z|}{\sqrt{b^2+z^2}}\right)\right]\operatorname{sgn}(z)\mathbf{e}_z=\frac{Qz}{2\pi\varepsilon_0 a^2}\left(\frac{1}{\sqrt{b^2+z^2}}-\frac{1}{\sqrt{a^2+z^2}}\right)\mathbf{e}_z$$

La variation du champ électrique lors du passage de $M_2(0,0,-\varepsilon)$ à $M_1(0,0,\varepsilon)$ quand $\varepsilon\to 0$ est alors :

$$\boxed{\delta\mathbf{E}_0=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\mathbf{E}_0(\varepsilon)-\mathbf{E}_0(-\varepsilon)\right)=\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 a^2}\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{2\varepsilon}{\sqrt{b^2+z^2}}-\frac{2\varepsilon}{\sqrt{a^2+z^2}}\right)\mathbf{e}_z=\mathbf{0}}$$

Déphaseur.

31. L'AO est supposé idéal $(i_+=i_-=0)$ et fonctionne en régime linéaire $(V_+=V_-)$. On applique le théorème de Millman aux entrées non inverseuse et inverseuse, soit :

$$\underline{V}_+=\frac{\underline{V}_e}{1+jCr\omega} \quad , \quad \underline{V}_-=\frac{1}{R_1+R_2}\left(R_2\underline{V}_e+R_1\underline{V}_s\right)$$

On en déduit la fonction de transfert du circuit :

$$\boxed{\underline{T}(j\omega)=\frac{\underline{V}_s}{\underline{V}_e}=\frac{R_1-jCrR_2\omega}{R_1+jCrR_1\omega}}$$

32. Le module de la fonction de transfert, $\left|\underline{T}(j\omega)\right|=\frac{\sqrt{R_1^2+\left(CrR_2\omega\right)^2}}{\sqrt{R_1^2+\left(CrR_1\omega\right)^2}}$, sera indépendant de w si et seulement si :

$$\boxed{R_2=R_1=10^3\,\Omega}$$

33. Dans ce cas nous aurons :

$$\boxed{\left|\underline{T}(j\omega)\right|=1}$$

On est en présence d'un ***déphaseur pur***.

34. La fonction de transfert se met sous la forme :

$$\underline{T}(j\omega)=\frac{1-jCr\omega}{1+jCr\omega}=\exp\left(j\varphi(\omega)\right)$$

Le déphasage de la tension de sortie par rapport à la tension d'entrée est donc :

$$\varphi(\omega) = \arg \underline{T}(j\omega) = 2\arctan(Cr\omega)$$

soit :

$$\boxed{\tan\frac{\varphi(\omega)}{2} = -Cr\omega}$$

35. Afin que $\varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2}$, pour $\omega = 10^3\,\text{rad.s}^{-1}$ et avec $C = 1\,\mu F$, il faut que :

$$\boxed{r = \frac{1}{C\omega} = 10^3\,\Omega}$$

36. L'amplitude complexe de l'intensité du courant entrant est :

$$\underline{I}_e = \frac{\underline{V}_e - \underline{V}_s}{R_1 + R_2} + \frac{jC\omega \underline{V}_e}{1 + jCr\omega} = \left(\frac{1 - \exp(j\varphi(\omega))}{R_1 + R_2} + \frac{jC\omega}{1 + jCr\omega}\right)\underline{V}_e = \frac{\underline{V}_e}{\underline{Z}_e}$$

Avec les conditions imposées l'impédance d'entrée du circuit est :

$$\boxed{\underline{Z}_e = 500(1 - j)\,\Omega}$$

-:-:-:-:-