EPL - SESSION 2009
CORRIGÉ

Électrocinétique.

1. On peut envisager l'une des deux démarches suivantes.

a) On est en présence d'un diviseur de tension constitué d'une résistance $R = \dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$ et d'une capacité $C = C_1 + C_2$. Sa fonction de transfert harmonique est donc :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{u}_s}{\underline{u}_e} = \frac{1}{1 + \underline{Z}_R \underline{Y}_C} = \frac{1}{1 + jCR\omega}$$

On est en présence d'un ***filtre passe-bas du premier ordre fondamental***.

b) On observe que :

♦ en basse fréquence un condensateur parfait se comporte comme un interrupteur ouvert d'où $u_s = u_e$;

♦ en haute fréquence un condensateur parfait se comporte comme un interrupteur fermé d'où $u_s = 0$.

Le circuit se comporte donc comme un filtre passe-bas.
Par ailleurs, les tensions d'entrée et de sortie sont liées par l'équation :

$$RC \frac{du_s(t)}{dt} + u_s(t) = u_e(t)$$

qui est une équation du premier ordre fondamental (*pas de dérivée de* u_e *par rapport au temps*).
On est donc en présence d'un filtre passe-bas du premier ordre fondamental.

2. La pulsation de coupure à $-3\,\text{dB}$ est :

$$\omega_c = \frac{1}{RC} = \frac{R_1 + R_2}{(C_1 + C_2) R_1 R_2}$$

3. On en déduit la fréquence de coupure à $-3\,\text{dB}$:

$$f_c = \frac{\omega_c}{2\pi} = \frac{R_1 + R_2}{2\pi (C_1 + C_2) R_1 R_2} = 955\,\text{Hz}$$

4. On a, d'après la fonction de transfert, $\tan\phi = -\dfrac{\omega}{\omega_c}$. Ainsi, pour $\omega = 2\omega_c$, il vient :

$$\tan\phi = -2 \Rightarrow \phi = -63{,}4°$$

La tension de sortie présente un retard de phase par rapport à la tension d'entrée.

5. Pour $\omega = \omega_c$ la fonction de transfert s'écrit $\underline{H}(j\omega_c) = \dfrac{1-j}{2}$. Le résistor de résistance R_1 est alors soumise à une tension instantanée $\underline{u}_1(t) = (1 - \underline{H}(j\omega_c))\underline{u}_e(t) = \dfrac{1+j}{2}\underline{u}_e(t)$ et traversée par une intensité instantanée $\underline{i}_1(t) = \dfrac{\underline{u}_1(t)}{R_1}$. La puissance moyenne dissipée dans ce résistor est donc :

$$P = \frac{1}{2} \Re e\{\underline{u}_1(t).\underline{i}_1{}^*(t)\} = \frac{|\underline{u}_1(t)|^2}{2R_1} = \frac{u_{e,m}^2}{4R_1}$$

6. Le résistor R_1 dissipe une énergie totale E pendant la durée τ telle que :

$$\tau = \frac{E}{P} = \frac{4R_1 E}{u_{e,m}^2} = 1000\,\text{s} = 16\,\text{min}\,40\text{s}$$

Oscillateur masse/ressort massique.

7. Pas de question. On peut cependant, pour l'utiliser ensuite, étudier l'équilibre masse/ressort sans masse (m = 0). Nous avons :

$$\boxed{Mg = k\left(z_{A,e} - L_0\right)}$$

8. La relation fondamentale de la dynamique appliquée à la masse ponctuelle M dans le référentiel lié au bâti fixe et supposé galiléen conduit, en projection selon Oz, à :

$$M\frac{d^2z_A}{dt^2} = Mg - k\left(z_A - L_0\right)$$

Compte tenu de la condition d'équilibre il vient :

$$\frac{d^2z_A}{dt^2} + \frac{k}{M}\left(z_A - z_{A,e}\right) = 0$$

C'est l'équation différentielle du mouvement d'un oscillateur harmonique de période :

$$\boxed{T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{M}{k}}}$$

9. Toujours dans l'hypothèse où m = 0, l'allongement du ressort à l'équilibre est :

$$\boxed{\Delta L = z_{A,e} - L_0 = \frac{Mg}{k} = 19{,}6\,\text{cm}}$$

C'est un ressort très souple.

10. On tient compte, maintenant, de la masse de ce ressort homogène. La tranche d'épaisseur dz, à l'abscisse z, présente une masse $dm = \frac{m}{z_A}dz$. Son énergie cinétique est donc :

$$\boxed{dE_k^r = \frac{1}{2}dm\,v^2\left(z\right) = \frac{m}{2}\frac{z^2}{z_A^3}v_A^2dz}$$

11. L'énergie cinétique totale du ressort est alors :

$$\boxed{E_k^T = \int_0^{z_A}\frac{m}{2}\frac{z^2}{z_A^3}v_A^2dz = \frac{mv_A^2}{6}}$$

12. ***Attention, il est nécessaire de tenir compte de l'énergie potentielle de pesanteur***. On a alors :

$$E_p = \frac{1}{2}k\left[\left(z_A - L_0\right)^2 - \left(z_{A,e} - L_0\right)^2\right] - \left(M + \frac{m}{2}\right)g\left(z_A - z_{A,e}\right)$$

si on prend comme état de référence la position d'équilibre du système. Dans cet état d'équilibre on a maintenant $M + \frac{m}{2} = k\left(z_{A,e} - L_0\right)$, ce qui nous donne :

$$E_p = \frac{1}{2}k\left(z_A - z_{A,e}\right)^2$$

La conservation de l'énergie mécanique du système masse/ressort massique se traduit par :

$$E_m = \frac{1}{6}mv_A^2 + \frac{1}{2}Mv_A^2 + \frac{1}{2}k\left(z_A - z_{A,e}\right)^2 = \text{Cte}$$

que l'on peut encore écrire sous la forme :

$$\left(\frac{dz_A}{dt}\right)^2 + \frac{k}{M + \left(m/3\right)}\left(z_A - z_{A,e}\right)^2 = \text{Cte}$$

C'est l'équation différentielle du mouvement d'un oscillateur harmonique de pulsation propre :

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{k}{M + \frac{m}{3}}}}$$

On observe ainsi l'influence de la masse du ressort sur la période des oscillations.

Remarque. Le développement que nous venons d'effectuer n'est valable que si l'on observe qu'un mode fondamental de vibration dans lequel le ressort a la forme qu'il aurait si on le déformait statiquement

Électrostatique.

13. Toute rotation autour de l'axe de la sphère laisse la distribution de charge invariante donc $\vec{E} = \vec{E}(r)$ où r est la distance du centre O de la sphère au point considéré.

Tout plan passant par O est plan de symétrie pour la distribution de charge. Le champ électrostatique, ***vecteur vrai***, appartient à ces plans, soit $\vec{E} = E(r)\vec{e}_r$.

On applique le théorème de Gauss sur une surface sphérique Σ, de centre O et de rayon r, ce qui nous conduit à :

$$4\pi r^2 E(r) = \begin{cases} 0 \text{ pour } r < \alpha R \\ \frac{4\pi}{3}\frac{\rho}{\varepsilon_0}\left(r^3 - \alpha^3 R^3\right) \text{ pour } \alpha R < r < R \\ \frac{4\pi}{3}\frac{\rho}{\varepsilon_0}\left(1-\alpha^3\right)R^3 \text{ pour } r > R \end{cases}$$

On en déduit l'expression du champ électrostatique dans la région (I) définie par r > R :

$$\boxed{\vec{E}_I(r) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\frac{\left(1-\alpha^3\right)R^3}{r^2}\vec{e}_r}$$

14. Dans la région (II), définie par $\alpha R < r < R$, on obtient :

$$\boxed{\vec{E}_{II}(r) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left(r - \frac{\alpha^3 R^3}{r^2}\right)\vec{e}_r}$$

Remarque. On peut considérer que la distribution proposée résulte de la superposition :

♦ d'une sphère pleine, de centre O, de rayon R, chargée en volume avec une densité uniforme ρ ce qui conduit respectivement à un champ électrostatique et à un potentiel électrostatique (*continu en* $r = R$ et $\lim\limits_{r\to+\infty} V_+ = 0$) :

$$\vec{E}_+(r) = \begin{cases} \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\frac{R^3}{r^2}\vec{e}_r \text{ pour } r > R \\ \frac{\rho}{3\varepsilon_0} r\vec{e}_r \text{ pour } r < R \end{cases} \qquad V_+(r) = \begin{cases} \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\frac{R^3}{r} \text{ pour } r > R \\ \frac{\rho}{2\varepsilon_0}\left(R^2 - \frac{r^2}{3}\right) \text{ pour } r < R \end{cases}$$

♦ d'une sphère pleine, de centre O, de rayon αR $(\alpha < 1)$, chargée en volume avec une densité uniforme $(-\rho)$ ce qui conduit respectivement à un champ électrostatique et à un potentiel électrostatique :

$$\vec{E}_-(r) = \begin{cases} \frac{-\rho}{3\varepsilon_0}\frac{\alpha^3 R^3}{r^2}\vec{e}_r \text{ pour } r > \alpha R \\ \frac{-\rho}{3\varepsilon_0} r\vec{e}_r \text{ pour } r < \alpha R \end{cases} \qquad V_-(r) = \begin{cases} \frac{-\rho}{3\varepsilon_0}\frac{\alpha^3 R^3}{r} \text{ pour } r > \alpha R \\ \frac{-\rho}{2\varepsilon_0}\left(\alpha^2 R^2 - \frac{r^2}{3}\right) \text{ pour } r < \alpha R \end{cases}$$

15. Le potentiel électrostatique dans la région (I) est tel que :

$$\frac{dV_I(r)}{dr} = -\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\frac{\left(1-\alpha^3\right)R^3}{r^2}$$

Comme on prend $\lim\limits_{r\to+\infty} V_I(r) = 0$ on en déduit :

$$\boxed{V_I(r) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\frac{\left(1-\alpha^3\right)R^3}{r}}$$

On peut aussi utiliser le théorème de superposition - ou théorème d'Helmholtz - à l'aide des résultats donnés dans la remarque précédente.

16. Le théorème de superposition nous conduit pour la région (III), soit $r < \alpha R$, à :

$$\boxed{V_{III}(r) = \frac{\rho}{2\varepsilon_0}\left(1-\alpha^2\right)R^2}$$

17. La conservation de la charge électrique se traduit par :

$$Q = \frac{4\pi}{3}\rho\left(1-\alpha^3\right)R^3 = 4\pi\sigma R^2$$

Compte tenu que $1-\alpha = \varepsilon \ll 1$, on peut écrire, à l'ordre le plus bas non nul, $1-\alpha^3 \approx 3\varepsilon = 3(1-\alpha)$, d'où :

$$\boxed{\sigma \approx (1-\alpha)\rho R}$$

18. Dans le cas où $1-\alpha = \varepsilon \ll 1$ on a respectivement $V_I(r) = \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 r}$ et $V_{III}(r) = \frac{\sigma R}{\varepsilon_0} = \text{Cte}$. La continuité du potentiel en r = R impose :

$$\boxed{U = V_I(R) - V_{III}(0) = 0}$$

Lunette astronomique.

19. L'instrument est afocal si le foyer principal image de L_1 est confondu avec le foyer principal objet de L_2, soit $F'_1 = F_2$. Le grandissement transversal de ce système afocal est $G_t = -\frac{f'_2}{f'_1}$. Or, les milieux extrêmes étant identiques, grandissement angulaire et grandissement transversal sont liés par la relation $G_t.G_a = 1$; on en déduit :

$$\boxed{G_a = \frac{1}{G_t} = -\frac{f'_1}{f'_2} = -5{,}75}$$

20. On a $|G_a| = \frac{\theta'}{\theta}$ et on note α la limite de résolution angulaire de l'œil. Pour que les deux étoiles apparaissent séparées à travers la lunette il faut que $\theta' \geq \alpha$ ce qui impose un écart angulaire minimal θ_m entre les deux étoiles :

$$\boxed{\theta \geq \theta_m = \frac{\alpha}{|G_a|} = 0{,}26'}$$

21. Avec la relation de conjugaison de Descartes, $\frac{-1}{\overline{O_2O_1}} + \frac{1}{\overline{O_2O'_1}} = \frac{1}{f'_2}$, où $\overline{O_2O_1} = p_1 = -\left(f'_1 + f'_2\right)$ et $\overline{O_2O'_1} = p'_1$. Il vient :

$$\boxed{p'_1 = \frac{f'_2\left(f'_1 + f'_2\right)}{f'_1} = 23{,}5\,\text{mm}}$$

22. En valeur absolue, le grandissement transversal de L_2 est $\left|G_{t2}\right| = \frac{p'_1}{\left|p_1\right|} = \frac{f'_2}{f'_1}$, d'où le diamètre de l'image de la monture de L_1 par L_2 :

$$\boxed{D'_1 = \left|G_{t2}\right| D_1 = \frac{f'_2}{f'_1} D_1 = 7{,}0\,\text{mm}}$$

23. On observe une image nette de l'objet, sans accommoder, si l'objectif donne une image intermédiaire dans le plan focal objet de L_2, soit : $A \xrightarrow{L_1} A' = F_2$. La formule de conjugaison de Newton, $\overline{F_1A}.\overline{F'_1A'} = -f'^2_1$, avec $\overline{F_1A} = \overline{F_1O_1} + \overline{O_1A} = f'_1 - d_A$ et $\overline{F'_1A'} = \overline{F'_1F_2} = d$, nous conduit à :

$$\boxed{d = \frac{f'^2_1}{d_A - f'_1} = 0{,}27\,\text{mm}}$$

24. Le diamètre apparent α de la galaxie étant petit, le diamètre de son image donnée par L_1, dans son plan focal image, peut s'écrire :

$$\boxed{D' = f'_1 \tan\alpha \approx f'_1\,\alpha = 5{,}0\,\text{mm}}$$

Machine de Stirling.

25. Ce cycle de Stirling, constitué de deux isothermes et de deux isochores, est moteur puisque décrit dans le sens horaire.
L'entropie étant une fonction d'état, le bilan entropique sur un cycle se traduit par :

$$\boxed{\Delta S = 0}$$

Attention, dans l'énoncé de cette question il faut lire $T_3 = 1200$ K.

26. La transformation $(3) \to (4)$ est isotherme donc le travail reçu par le fluide caloporteur (une mole de gaz parfait) au cours de cette évolution est :

$$\boxed{W_{3\to4} = -\int_{V_2}^{V_1} RT_3 \frac{dV}{v} = RT_3 \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) = RT_3 \ln\beta < 0}$$

27. La première loi de Joule implique $\Delta U_{3\to4} = 0$. On en déduit, à l'aide du premier principe de la thermodynamique, la chaleur reçue par le gaz lors de la transformation $(3) \to (4)$:

$$\boxed{Q_{3\to4} = -W_{3\to4} = -RT_3 \ln\beta = 16\,\text{kJ} > 0}$$

28. La transformation $(2) \to (3)$ est isochore donc, d'après le premier principe de la thermodynamique et la première loi de Joule, le gaz reçoit une quantité de chaleur :

$$\boxed{Q_{2\to3} = \Delta U_{2\to3} = \frac{R}{\gamma - 1}\left(T_3 - T_1\right) = 14{,}5\,\text{kJ} > 0}$$

29. Au cours du cycle le fluide a reçu le travail :

$$\boxed{W = W_{3\to4} + W_{1\to2} = R\left(T_3 - T_1\right)\ln\beta < 0}$$

30. L'efficacité de la machine est par définition :

$$\boxed{\eta = \frac{-W}{Q_{3\to4}} = 1 - \frac{T_1}{T_3} = 0{,}58}$$

On observe que le moteur de Stirling à la même efficacité que le moteur de Carnot fonctionnant entre les mêmes températures.

Régime transitoire en électrocinétique.

31. La continuité de l'énergie dans la bobine et dans le condensateur implique, respectivement, la continuité de l'intensité dans la bobine et la continuité de la tension aux bornes du condensateur.

La bobine et le condensateur sont des dipôles linéaires car intensité et tension sont liées par des équations différentielles linéaires telles que :

- ♦ $u(t) = L\dfrac{di(t)}{dt}$ pour la bobines ;
- ♦ $i(t) = C\dfrac{du(t)}{dt}$ pour le condensateur.

32. ***Attention,*** dans cette question il faut lire "la tension aux bornes de $\mathcal{D}$".
$\mathcal{D}$ est un résistor de résistance R. La loi des mailles nous conduit à l'équation différentielle :

$$\frac{ER}{R+r} = u(t) + \frac{L}{R+r}\frac{du(t)}{dt}$$

Compte tenu de la continuité de l'intensité du courant dans la bobine, $i(0^+) = i(0^-) = 0$, il en résulte, aux bornes de $\mathcal{D}$, $u(0^+) = u(0^-) = 0$. Si on pose $\tau = \dfrac{L}{R+r}$, l'équation différentielle précédente s'intègre en : $u(t) = \dfrac{ER}{R+r}\left(1 - \exp\left(-\dfrac{t}{\tau}\right)\right)$. Cette tension atteindra 63,2% de sa valeur finale au bout de la durée :

$$\boxed{\tau_1 = -\tau\ln(0{,}368) = 2{,}9\,\text{ms}}$$

33. $\mathcal{D}$ est une bobine d'inductance L'. La loi des mailles nous donne :

$$\frac{E}{r} = \frac{L+L'}{r}\frac{di(t)}{dt} + i(t)$$

La solution de cette équation différentielle, compte tenu de la continuité de l'intensité dans les bobines et en posant $\tau' = \dfrac{L+L'}{r}$, est $i(t) = \dfrac{E}{r}\left(1 - \exp\left(-\dfrac{t}{\tau'}\right)\right)$. Cette tension atteindra 63,2% de sa valeur finale au bout de la durée :

$$\boxed{\tau_2 = -\tau'\ln(0{,}368) = 42{,}5\,\text{ms}}$$

34. $\mathcal{D}$ est désormais un condensateur de capacité C. On a donc un circuit (rLC) série, de fréquence propre $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$, et dont le facteur de qualité est :

$$\boxed{Q = \frac{L\omega_0}{r} = \frac{1}{r}\sqrt{\frac{L}{C}} = 79}$$

35. Après fermeture de l'interrupteur K, l'intensité qui s'établit dans ce circuit (rLC) série obéit à l'équation différentielle :

$$E = L\frac{di(t)}{dt} + ri(t) + \frac{1}{C}\int i(t)dt \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2i(t)}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{di(t)}{dt} + \omega_0^2 i(t) = 0$$

Compte tenu que $i(0^+) = 0$, $\left(\dfrac{di(t)}{dt}\right)_{t=0^+} = \dfrac{E}{r}$ et $Q > \dfrac{1}{2}$, cette équation différentielle s'intègre en :

$$\boxed{i(t) = \frac{E}{r}\exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right)\sin\left(\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}\,\omega_0 t\right)}$$

L'intensité du courant électrique évolue en régime pseudo-périodique et $\lim\limits_{t\to+\infty} i(t) = 0$ car lorsque le condensateur est chargé il se comporte comme un interrupteur ouvert.

36. Lorsque le condensateur est chargé la tension entre ses bornes est égale à celle du générateur, soit :

$$\boxed{u_\infty = E = 2\,\text{V}}$$

-:-:-:-:-