EPL - SESSION 2011
CORRIGÉ

Mécanique du point.

1. Le palet P glisse sans frottement – liaison unilatérale - le long du plan incliné. La conservation de son énergie mécanique entre A et B se traduit, si le point B est atteint, par :

$$\frac{1}{2}mV_A^2 = \frac{1}{2}mV_B^2 + mgR\cos\alpha$$

On en déduit :

$$\boxed{V_B = \sqrt{V_A^2 - gR\cos\alpha}}$$

2. Le point B est effectivement atteint par le palet si V_B existe, ce qui nécessite de communiquer en A au mobile une vitesse V_A telle que :

$$\boxed{V_A > V_{A,\ell} = \sqrt{2gR\cos\alpha} \approx 6\text{m.s}^{-1}}$$

3. On applique la deuxième loi de Newton au palet P dans le référentiel lié à la piste et supposé galiléen, soit :

$$M\left(\frac{d\vec{V}(P/\mathcal{R})}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = M\vec{g} + \vec{R}_N$$

En projection suivant $\vec{u} = \dfrac{\overrightarrow{AB}}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|}$ il vient :

$$\frac{dV(t)}{dt} = -g\sin\alpha$$

Par intégration, compte tenu des conditions initiales $V(t=0) = V_A$, on obtient la vitesse du palet :

$$V(t) = V_A - g\,t\sin\alpha$$

Il en résulte que la durée de parcours de la portion AB est :

$$\boxed{\tau = \frac{V_A - V_B}{g\sin\alpha} = \frac{V_A - \sqrt{V_A^2 - 2gR\cos\alpha}}{g\sin\alpha}}$$

Notons que sur cette portion on a $(R_N)_{AB} = Mg\cos\alpha > 0$, donc le palet reste en contact avec la piste.

4. Sur l'arc BC on a :

$$\left(\frac{d\vec{V}(P/\mathcal{R})}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = -R\dot{\theta}^2\vec{u}_r + R\ddot{\theta}\vec{u}_\theta \quad , \quad \vec{R}_N = R_N\vec{u}_r \quad , \quad M\vec{g} = Mg\left(-\cos\theta\vec{u}_r + \sin\theta\vec{u}_\theta\right)$$

avec $\vec{u}_r = \dfrac{\overrightarrow{OP}}{\left\|\overrightarrow{OP}\right\|}$ et $\vec{u}_\theta = \dfrac{d\vec{u}_r}{d\theta}$.

L'équation différentielle du mouvement du palet nous conduit, en projection selon $\vec{u}_r$, à :

$$\boxed{R_N = M\left(g\cos\theta - R\dot{\theta}^2\right)}$$

5. La conservation de l'énergie mécanique du palet peut maintenant s'écrire :

$$\frac{1}{2}MV_A^2 = \frac{1}{2}MR^2\dot{\theta}^2 + MgR\cos\theta$$

d'où on déduit :

$$R\dot{\theta}^2 = \frac{V_A^2}{R} - 2g\cos\theta$$

Il en résulte que :

$$R_N(\theta) = M\left(3g\cos\theta - \frac{V_A^2}{R}\right)$$

Entre B et le sommet S de la piste, $R_N(\theta)$ passe par un minimum pour $\theta = -\alpha$. Ainsi, le palet ne décollera pas avant le sommet de la piste si $R_N(-\alpha) > 0$ ce qui nécessite que :

$$\boxed{V_A < \sqrt{3Rg\cos\alpha}}$$

6. Au-delà du sommet le palet quittera la piste pour $\theta = \theta_d$ tel que $R_N(\theta_d) = 0$, soit :

$$\boxed{\theta_d = \arccos\left(\frac{V_A^2}{3gR}\right)}$$

Statique des fluides.

7. Le volume total du plongeur, V_T, est tel que $V_0 + V_m \le V_T \le V_0 + V_M$. Il en résulte que la poussée d'Archimède, due à l'eau, appartient à l'intervalle :

$$\mu g(V_0 + V_m) = 785\text{N} \le \Pi \le \mu g(V_0 + V_M) = 830\text{N}$$

alors que le poids du plongeur reste constant et égal à $Mg = 800\text{N}$.
Ainsi, le plongeur flotte s'il inspire totalement mais coule s'il expire totalement.

8. L'équation fondamentale de la statique des fluides montre que la pression de l'eau varie avec la profondeur selon : $P(z) = P_0 + \mu g z$.
Par ailleurs l'air, considéré comme un gaz parfait à température constante, obéit à la loi de Mariotte : $PV = \text{Cte}$.
Sachant que l'air dans les poumons est à la même pression que l'eau il en résulte que :

$$P_0 V_M = P(z)V(z) = (P_0 + \mu g z)V(z)$$

soit :

$$\boxed{V(z) = \frac{P_0 V_M}{P_0 + \mu g z}}$$

9. Le plongeur est soumis à son poids, constant, et à la poussée d'Archimède qui varie avec la profondeur. Ces deux forces vont s'équilibrer à la profondeur z_1 telle que :

$$\Pi(z_1) = \mu g\left(V_0 + V(z_1)\right) = \mu g\left(V_0 + \frac{P_0 V_M}{P_0 + \mu g z_1}\right) = Mg$$

soit :

$$\boxed{z_1 = \frac{P_0}{g}\left(\frac{V_M}{M - \mu V_0} - \frac{1}{\mu}\right) = 10\text{m}}$$

10. Le volume minimal des poumons est atteint à la profondeur z_2 telle que :

$$V_m = V(z_2) = \frac{P_0 V_M}{P_0 + \mu g z_2}$$

soit :

$$\boxed{z_2 = \frac{P_0}{\mu g}\left(\frac{V_M}{V_m} - 1\right) = 30\text{m}}$$

11. La pression partielle de diazote à la profondeur z est :

$$P_{N_2}(z) = x_{N_2}.P(z) = x_{N_2}(P_0 + \mu g z)$$

Il en résulte que le plongeur va ressentir l'ivresse des profondeurs à la profondeur z_3 telle que :

$P_{\ell im} = P_{N_2}(z_3) = x_{N_2}(P_0 + \mu g z_3)$
ce qui nous donne :

$$z_3 = \frac{\left(P_{\ell im}/x_{N_2}\right) - P_0}{\mu g} = 40\text{m}$$

12. A chaque respiration le plongeur consomme $V_r = 1\ell$ d'air à la pression $P(z_3)$ et à la température T. Sachant qu'il effectue $N = 15$ respirations par minute il va consommer, avant d'entamer sa remontée, un volume total d'air :

$$V_a = NV_r\Delta t = (n_i - n_f)\frac{RT}{P(z_3)}$$

Or la volume VB de la bouteille et la température T de l'air qu'elle contient ne varient pas ; il vient donc :

$$NV_r\Delta t = (P_i - P_f)\frac{V_B}{P(z_3)}$$

On en déduit la durée de la plongée :

$$\Delta t = (P_i - P_f)\frac{V_B}{NV_rP(z_3)} = 16\,\text{min}$$

Thermodynamique.

13. On amène d'abord la masse $m_L = Nm$ d'eau liquide de la température $T_1 = 298\text{K}$ à la température $T_0 = 273\text{K}$. Cette masse d'eau se solidifie à la température constante T_0. Enfin on porte la masse de glace $m_{g\ell} = m_L$ de la température T_0 à la température $T_2 = 255\text{K}$.
La variation d'enthalpie de l'eau entre son état initial liquide et son état final solide est alors :

$$\Delta H = Nmc_L(T_0 - T_1) - \frac{Nm}{M}\Delta H_f + Nmc_{g\ell}(T_2 - T_0)$$

14. La transformation de l'eau est isobare donc :

$$Q = \Delta H$$

15. L'entropie est une grandeur ***extensive*** qui ne peut que croître (*ou rester constante si l'évolution est réversible*) pour un système ***fermé et isolé***.

On rappelle que la néguentropie (–S) est potentiel thermodynamique pour un système fermé et isolé.

16. On reprend la transformation évoquée à la question 13. La variation d'entropie au cours de cette transformation est alors :

$$\Delta S = Nmc_L \ln\left(\frac{T_0}{T_1}\right) - \frac{Nm}{M}\frac{\Delta H_f}{T_0} + Nmc_{g\ell}\ln\left(\frac{T_2}{T_0}\right)$$

17. On suppose que le congélateur est une machine thermique idéale (machine de Carnot) fonctionnant entre une source froide, de température T_2, et une source chaude, de température T_1. Son efficacité est alors :

$$e_f = \frac{Q_2}{W} = \frac{T_2}{T_1 - T_2}$$

18. Le congélateur rejette dans la pièce la somme de l'énergie thermique prélevée à la source froide – c'est-à-dire à la pièce – et du travail fourni par l'alimentation électrique du moteur : il en résulte que la température moyenne de la pièce s'élève.

Circuit RLC en régime harmonique.

19. Lorsque $\omega \to 0^+$ le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert donc $u_b = 0$.

Lorsque $\omega \to +\infty$ le condensateur se comporte comme un interrupteur fermé et l'inductance propre comme un interrupteur ouvert donc $u_b = e$.
Nous sommes en présence d'un filtre passe-haut.

20. On positionne R en série avec C ; on est alors en présence d'un diviseur de tension d'où la fonction de transfert harmonique :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{u}_b}{\underline{e}} = \frac{R_L + jL\omega}{(R + R_L) + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)}$$

Lorsque la pulsation du générateur est égale à la pulsation propre du circuit, $\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, le module de la fonction de transfert (c'est-à-dire le gain en tension) est tel que :

$$\boxed{\left|\underline{H}(j\omega_0)\right| = \frac{\sqrt{R_L^2 + L^2\omega_0^2}}{R + R_L}}$$

21. La tension u_R est proportionnelle à l'intensité i qui circule dans le circuit. Lorsque l'amplitude de u_R passe par un maximum il en de même de l'amplitude de i : c'est la résonance en intensité qui se produit, pour un circuit RLC série, lorsque la fréquence d'excitation f est égale à la fréquence propre $f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$ du circuit.
On en déduit l'inductance propre de la bobine :

$$\boxed{L = \frac{1}{4\pi^2 f_0^2 C} = 96\text{mH}}$$

22. L'amplitude complexe de la tension aux bornes du résistor de résistance R est :

$$\underline{U}_R = \left|\underline{U}_R\right| \exp(j\varphi_u) = \frac{R}{\underline{Z}}\underline{e}_m = \frac{R}{R + R_L + j\sqrt{\frac{L}{C}}\left(\frac{f}{f_0} - \frac{f_0}{f}\right)}\underline{e}_m$$

On en déduit le déphasage ϕ entre $u_R(t)$ et e(t) :

$$\phi = \varphi_u - \varphi_e = \arg \underline{U}_R - \arg \underline{e}_m = -\arg \underline{Z} = -\arctan\sqrt{\frac{L}{C}}\frac{\frac{f}{f_0} - \frac{f_0}{f}}{R + R_L}$$

Ce résultat nous montre que $\phi < 0$, donc $u_R(t)$ est en retard de phase par rapport à e(t), pour $f = f_1 > f_0$.

La détermination graphique suggérée, de ce même déphasage, est basée sur la "méthode des 9 carreaux" $(1 \text{ carreau } = 20°)$. Sur l'oscillogramme proposé on observe que $u_R(t)$ est en avance de phase par rapport à e(t) ($u_R(t)$ *coupe l'axe temporel dans le même sens que* e(t) *mais avant* e(t)) de $20.2{,}5 = 45°$. Ce résultat est en contradiction avec le développement théorique précédent.
Pour la suite nous prendrons donc :

$$\boxed{\phi = -45°}$$

23. A l'aide des résultats précédents on obtient :

$$\boxed{R_L = 2\pi L f_1 - \frac{1}{2\pi C f_1} - R = 12{,}4\Omega}$$

Notons que si nous avions pris $\phi = +\frac{\pi}{4}$, en accord avec l'oscillogramme, nous aurions obtenu une résistance de la bobine négative.

24. Le facteur de qualité du circuit est tel que :

$$\boxed{Q = \frac{L\omega_0}{R + R_L} = \frac{L\omega_0}{L\omega_1 - \frac{1}{C\omega_1}} = \frac{1}{\frac{f_1}{f_0} - \frac{f_0}{f_1}} = 18}$$

Microscope optique.

On considère que les lentilles sont utilisées dans les conditions de l'approximation de Gauss.

25. La formule de conjugaison de Newton pour la lentille L_1 (*objectif*) est :

$$\boxed{\overline{F_1A_1}.\overline{F_1'A_1'} = -f_1'^2}$$

26. L'observateur – supposé emmétrope - voit nettement les objets à l'infini lorsqu'il n'accommode pas. L'image A'_1 de A_1 dans L_1 doit donc se former au foyer principal objet de L_2 (*oculaire*). Nous aurons donc :

$$\overline{F_1A_1}.\overline{F'_1F_2} = -f_1'^2$$

d'où on déduit :

$$\boxed{\Delta = \overline{F'_1F_2} = \frac{-f_1'^2}{\overline{F_1A_1}} = 250\text{mm}}$$

27. Lorsqu'il accommode au maximum l'observateur voit nettement les objets qui sont au niveau de son punctum proximum. Dans cette situation on a :

$$A_2 \xrightarrow{L_1} A'_2 \xrightarrow{L_2} A''_2$$

où $\overline{F'_2A''_2} = -d$.
Avec les formules de conjugaison de Newton :

$$\overline{F_1A_2}.\overline{F'_1A'_2} = -f_1'^2 \quad , \quad \overline{F_2A'_2}.\overline{F'_2A''_2} = -f_2'^2$$

et compte tenu que $\Delta = \overline{F'_1F_2} = \overline{F'_1A'_2} - \overline{F_2A'_2}$, on en déduit la position du point objet A_2 :

$$\boxed{\overline{F_1A_2} = \frac{-f_1'^2 d}{d\Delta + f_2'^2}}$$

28. Soit A_1B_1 un objet placé perpendiculairement à l'axe optique en A_1. Le grandissement transversal à travers la lentille L_1 est alors :

$$\boxed{\gamma_t = \frac{\overline{A'_1B'_1}}{\overline{A_1B_1}} = \frac{\overline{F'_1A'_1}}{\overline{F'_1O_1}} = -\frac{\overline{F'_1A'_1}}{f'_1} = \frac{f'_1}{\overline{F_1A_1}}}$$

29. A la sortie du microscope les rayons lumineux issus de B_1, qui sont passés par B'_1, donnent un faisceau de rayons parallèles qui font avec l'axe optique un angle α_1 tel que :

$$\boxed{\alpha_1 = \frac{\overline{A'_1B'_1}}{\overline{O_2F_2}} = \frac{\overline{A'_1B'_1}}{-f'_2} = \frac{-yf'_1}{f'_2.\overline{F_1A_1}} = \frac{yf'_1}{f'_2.\overline{A_1F_1}}}$$

30. L'objet précédent, placé à une distance d en avant de l'œil de l'observateur, est alors vu sous l'angle, supposé petit :

$$\boxed{\alpha_2 = \frac{y}{d}}$$

Magnétostatique : le solénoïde.

31. Le champ magnétique est à flux conservatif ce qui n'est pas le cas du champ électrique. Les lignes de champ magnétique sont donc fermées alors que celles du champ électrique sont ouvertes.

32. C'est un exemple classique du cours d'Electromagnétisme. Les lignes de courant sont orthoradiales donc le champ magnétique est axial. A l'intérieur de ce solénoïde infini le champ magnétique est uniforme et tel que :

$$\boxed{\vec{B}_1 = \mu_0 nI\vec{e}_z}$$

33. A l'extérieur du solénoïde infini le champ magnétique est nul.

$$\boxed{\vec{B}_2 = \vec{0}}$$

Les lignes de champ se referment à l'infini.

34. Toute rotation autour de l'axe Oz et toute translation parallèlement à cet axe laisse la distribution de courant invariante donc $\vec{B} = \vec{B}(r)$ où r est la distance du point considéré à l'axe Oz.

Tout plan contenant l'axe Oz est plan de symétrie pour la distribution de courant ; $\vec{B}$, pseudo vecteur, est orthogonal à ces plans, il est donc orthoradial, $\vec{B} = B(r)\vec{e}_\theta$.

On peut alors appliquer le théorème d'Ampère sur un contour circulaire Γ d'axe Oz et de rayon $r < R$. Comme ce contour fermé n'enlace aucun courant le champ magnétique à l'intérieur du solénoïde est nul.

$$\vec{B}_3 = \vec{0}$$

35. Une démarche identique à la précédente, mais avec un contour circulaire de rayon $r > R$, nous conduit, pour ce solénoïde, à un champ magnétique extérieur :

$$\vec{B}_4 = \frac{\mu_0 N I}{2\pi r}\vec{e}_\theta$$

36. Le théorème de superposition nous conduit, dans la région de l'espace $R < r < 2R$, à un champ magnétique :

$$\vec{B} = \mu_0 I\left(\frac{N}{2\pi r}\vec{e}_\theta + n\vec{e}_z\right)$$

Son intensité minimale est obtenue pour $r = 2R^-$ et a pour valeur :

$$B_m = \mu_0 I\sqrt{n^2 + \left(\frac{N}{4\pi R}\right)^2}$$

-:-:-:-:-