ICNA - SESSION 2000
ÉPREUVE COMMUNE DE PHYSIQUE
CORRIGÉ

Mécanique du point.

1. Le point matériel P a un mouvement circulaire donc $\mathbf{v} = v\tau = \frac{ds}{dt}\tau$. Or, $t = \frac{1}{\omega}\left[\exp\left(\frac{s}{b}\right) - 1\right]$, ce qui entraîne :

$$\boxed{v = b\omega \exp\left(-\frac{s}{b}\right)}$$

A l'instant t = 0 on a s(0) = 0, d'où la vitesse initiale du point matériel :

$$\boxed{v_0 = v(0) = b\omega}$$

En définitive : $v = v_0 \exp\left(-\frac{s}{b}\right)$.

2. Dans le repère de Frenet on a $a_T = \frac{dv}{dt}$ et $a_N = \frac{v^2}{b}$ puisque la particule se déplace sur une circonférence de rayon b. Il en résulte que :

$$\boxed{a_T = -\frac{v_0^2}{b}\exp\left(-\frac{2s}{b}\right) = -\frac{v^2}{b} \quad , \quad a_N = \frac{v_0^2}{b}\exp\left(-\frac{2s}{b}\right) = -a_T}$$

3. On a $\frac{d(\mathbf{v}^2)}{dt} = 2\mathbf{v}.\mathbf{a} = -\frac{2v^3}{b} < 0$ donc le mouvement est décéléré mais pas uniformément car $\|\mathbf{a}\| = f(t)$.

4. Les coordonnées polaires du point N sont $r = v = v_0 \exp\left(-\frac{s}{b}\right)$ et $\theta = \frac{\pi}{2} + \frac{s}{b}$ d'où l'équation polaire de l'hodographe :

$$\boxed{r = v_0 \exp\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)}$$

C'est une ***spirale logarithmique***.

5. On a, d'après la deuxième loi de Newton, $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, soit :

$$\boxed{F = \|\mathbf{F}\| = \sqrt{2}m\frac{v_0^2}{b}\exp\left(-\frac{2s}{b}\right) = \sqrt{2}\,\frac{mv^2}{b}}$$

6. D'après la question 2 on a $(\mathbf{n}, \mathbf{a}) = (\mathbf{n}, \mathbf{F}) = \frac{\pi}{4}$, on en déduit :

$$\boxed{\alpha = (\mathbf{F}, \mathbf{v}) = (\mathbf{F}, \mathbf{n}) + (\mathbf{n}, \mathbf{v}) = (\mathbf{F}, \mathbf{n}) + (\mathbf{n}, \tau) = -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} = -\frac{3\pi}{4}}$$

7. Une force de frottement visqueux est de la forme $\mathbf{F}_{vis} = -f(v)\mathbf{v}$ que l'on écrit souvent $\mathbf{F}_{vis} = -\lambda v^n \mathbf{v}$ où le coefficient de frottement λ est positif et l'exposant n varie avec la vitesse v mais peut être pris constant dans un certain domaine de vitesse. Ici la force **F** s'apparente à une force de frottement visqueux quadratique en v.

8. Le théorème de l'énergie cinétique nous conduit à :

$$W = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = -\frac{1}{2}mv_0^2\left[1 - \exp\left(-\frac{2s}{b}\right)\right]$$

9. Quand $t \to +\infty$ on a $v \to 0$ d'où le travail total de la force **F** au cours du mouvement :

$$W_T = -\frac{1}{2}mv_0^2$$

C'est d'ailleurs la seule solution négative proposée.

Électrostatique : fils infinis.

10. Les symétries du problème imposent $\mathbf{E} = E(\rho)\mathbf{e}_\rho$. On applique le théorème de Gauss sur une surface cylindrique d'axe Oz, de rayon r et de hauteur unité, ce qui nous conduit à :

$$\mathbf{E}(P) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\rho}\mathbf{e}_\rho$$

11. Par définition : $\mathbf{E} = -\nabla V = -\frac{dV}{d\rho}\mathbf{e}_\rho$, d'où par intégration :

$$V(P) = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\rho + \text{Cte}$$

12. Si on prend l'origine des potentiels dans le plan médiateur des deux fils on peut écrire :

$$V(M) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)$$

Or, $\ln\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1 + \frac{d}{r}\cos\theta + \frac{d^2}{4r^2}}{1 - \frac{d}{r}\cos\theta + \frac{d^2}{4r^2}}\right) \approx \frac{d}{r}\cos\theta$ car $d \ll r$ (*approximation dipolaire*), il en résulte que :

$$V(M) \approx \frac{\lambda d}{2\pi\varepsilon_0 r}\cos\theta = \frac{p}{2\pi\varepsilon_0 r}\cos\theta$$

13. Dans le plan xOy les traces des surfaces équipotentielles sont les courbes d'équation $\frac{\rho_2}{\rho_1} = k > 0$, soit :

$$\left(x - \frac{\beta d}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{d^2}{4}\left(\beta^2 - 1\right) \text{ avec } \beta = \frac{1 + k^2}{1 - k^2}$$

Ces traces forment un faisceau de cercles centrés sur l'axe Ox, orthogonaux au cercle de diamètre $[O_2O_1]$; O_1 et O_2 sont les points limites de ce faisceau. L'équipotentielle nulle est le plan médiateur de O_2O_1.

14. On a $\mathbf{E}(M) = \frac{p}{2\pi\varepsilon_0 r^2}\left(\cos\theta\,\mathbf{e}_r + \sin\theta\,\mathbf{e}_\theta\right)$ donc $\|\mathbf{E}(M)\| = \frac{p}{2\pi\varepsilon_0 r^2}$. Les lignes $\|\mathbf{E}(M)\|$ = Cte, soit r = Cte, sont des cercles centrés en O. (A ne pas confondre avec les lignes de champ qui sont les courbes orthogonales aux surfaces équipotentielles. Dans le plan xOy c'est un faisceau de cercles orthogonaux aux traces des équipotentielles, centrés sur l'axe Oy et passant par les points O_1 et O_2.)

Par ailleurs :

$$\mathbf{e}_x.\mathbf{E}(M) = \frac{p}{2\pi\varepsilon_0 r^2}\left(\cos^2\theta - \sin^2\theta\right) = \frac{p}{2\pi\varepsilon_0 r^2}\cos(2\theta) = \|\mathbf{E}(M)\|\cos\alpha \Rightarrow \alpha = 2\theta$$

Électrocinétique : régime sinusoïdal.

15. L'impédance d'entrée du circuit est : $\underline{Z}_e = \frac{1}{jC\omega} + \underline{Z}'$ avec $\underline{Y}' = \frac{1}{\underline{Z}'} = \frac{1}{jL\omega} + \frac{jC\omega}{1 + jC\omega\underline{Z}}$, soit :

$$\boxed{\underline{Z}_e = \frac{\underline{Z}C\omega\left(1 - LC\omega^2\right) + j\left(2LC\omega^2 - 1\right)}{C\omega\left(1 - LC\omega^2 + jC\underline{Z}\omega\right)}}$$

16. On veut que $\underline{Z}_e = \underline{Z}$ ce qui implique :

$$\boxed{\underline{Z}^2 = \frac{2L}{C} - \frac{1}{C^2\omega^2}}$$

17. Comportement résistif si l'impédance $\underline{Z}$ est réelle ce qui, compte tenu du résultat précédent, nécessite $\underline{Z}^2 > 0$, soit :

$$\boxed{\omega > \frac{1}{\sqrt{2LC}} = 5.10^4 \text{ rad.s}^{-1}}$$

Quand $\omega \to +\infty$ on obtient :

$$\boxed{\underline{Z} = R = \sqrt{2\frac{L}{C}} = 100\Omega}$$

18. En basse fréquence, c'est-à-dire quand $\omega \to 0$, le condensateur est équivalent à un circuit ouvert et l'inductance pure à un fil conducteur, donc $u_s = 0$.
En haute fréquence, c'est-à-dire quand $\omega \to +\infty$, le condensateur est équivalent à un fil conducteur et l'inductance pure à un circuit ouvert, donc $u_s = u_e$.
Le circuit se comporte comme un ***filtre passe-haut***.

Ondes électromagnétiques dans le vide.

19. La fréquence de l'onde est :

$$\boxed{N = \frac{c}{\lambda} = 5.10^{14} \text{ Hz}}$$

20. La longueur d'onde est telle que : $\lambda_v = 450\text{nm} < \lambda = 600\text{nm} < \lambda_r = 750\text{nm}$, donc la fréquence associée appartient au domaine des ***fréquences optiques***.

21. La norme du vecteur d'onde est :

$$\boxed{k = \frac{2\pi}{\lambda} = 1{,}047.10^7 \text{ m}^{-1}}$$

22. Un plan d'onde est un plan équiphase c'est-à-dire un plan tel que :

$$\boxed{2x + 2y + z = Cte}$$

23. En l'absence de charges l'équation de Maxwell-Ampère se réduit à : $\nabla.\mathbf{E} = 0$, soit en notation complexe pour cette onde plane : $\mathbf{k}.\underline{\mathbf{E}} = \frac{2k}{3}\left(\underline{E}_x + \underline{E}_y\right) = 0$. On en déduit :

$$\boxed{\underline{E}_y = -\underline{E}_x}$$

Ces deux composantes évoluent en opposition de phase.

24. L'onde étant plane, le champ magnétique associé est :

$$\boxed{\underline{\mathbf{B}} = \frac{\mathbf{k} \wedge \mathbf{E}}{kc} = \frac{\underline{E}_x}{3c}\left(\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y - 4\mathbf{e}_z\right)}$$

25. La densité volumique d'énergie électromagnétique au point P à l'instant de date t est :

$$\boxed{u = \frac{1}{2}\varepsilon_0\mathbf{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0}\mathbf{B} = 2\varepsilon_0 E_0^2 \cos^2 \Phi}$$

26. Elle présente une valeur moyenne temporelle :

$$\boxed{\langle u\rangle = \varepsilon_0 E_0^2 = 8{,}84.10^{-20}\,\mathrm{J} = 0{,}55\mathrm{eV}}$$

27. Le vecteur de Poynting associé à cette onde est tel que :

$$\boxed{\mathbf{R} = \frac{1}{\mu_0}(\mathbf{E}\wedge\mathbf{B}) = \frac{2}{3}\varepsilon_0 c E_0^2 \cos^2\Phi\left(2\mathbf{e}_x + 2\mathbf{e}_y + \mathbf{e}_z\right)}$$

28. Sa fréquence est $N_R = 2N$ d'où sa période :

$$\boxed{T_R = \frac{1}{2N} = 10^{-15}\,\mathrm{s}}$$

Sa norme présente une valeur moyenne temporelle :

$$\boxed{\langle\|\mathbf{R}\|\rangle = \varepsilon_0 c E_0^2 = c\langle u\rangle = 2{,}65.10^{-11}\,\mathrm{W.m^{-2}}}$$

Solide en rotation.

29. La barre AB est en rotation autour d'un axe horizontal passant par son centre d'inertie, son énergie cinétique est donc :

$$\boxed{E_k(AB) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}Mb^2\right)\dot\theta^2 = \frac{1}{6}Mb^2\dot\theta^2}$$

30. L'énergie cinétique de la barre BC s'obtient en utilisant le théorème de Koenig, soit :

$$\boxed{E_k(BC) = \frac{1}{2}M\left(\sqrt{2}b\dot\theta\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}Mb^2\right)\dot\theta^2 = \frac{7}{6}Mb^2\dot\theta^2}$$

Remarque. On peut aussi écrire : $E_k(BC) = \frac{1}{2}J(Oz)\dot\theta^2$, où J(Oz) est le moment d'inertie de BC par rapport à l'axe Oz. Ce moment d'inertie est donné par le théorème d'Huygens :

$$J(Oz) = J(O'z) + M.OO'^2 = \frac{1}{3}Mb^2 + M\left(\sqrt{2}b\right)^2 = \frac{7}{3}Mb^2$$

31. L'énergie potentielle du solide dans le champ de pesanteur est, à une constante additive près :

$$\boxed{E_p = -2M\mathbf{g}.\mathbf{OG} = -M\mathbf{g}.\mathbf{OO'} = \sqrt{2}Mgb\cos\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right) = -Mgb\,(\sin\theta - \cos\theta)}$$

32. Si on suppose la liaison pivot parfaite le système est conservatif. Compte tenu des conditions initiales l'intégrale première de l'énergie se traduit par :

$$\frac{4}{3}Mb^2\dot\theta^2 - Mgb(\sin\theta - \cos\theta) = 0$$

d'où on déduit :

$$\boxed{\dot\theta^2 = \frac{3g}{4b}(\sin\theta - \cos\theta)}$$

33. Pour que le mouvement soit révolutif il faut que la vitesse angulaire conserve un signe constant donc ne s'annule jamais au cours du mouvement ce qui n'est pas possible ici.

Les seuls mouvements possible sont des mouvements périodiques tels que $\dot\theta^2 \geq 0$ soit $\theta \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]$.

Thermodynamique.

34. Un gaz parfait suit la première loi de Joule ainsi, le premier principe de la thermodynamique, compte tenu que $\delta W = k\delta Q$, nous conduit à :

$$dU = C_v dT = \frac{R}{\gamma-1}dT = \delta W + \delta Q = \frac{k+1}{k}\delta W = -\frac{k+1}{k}p\,dV = -\frac{k+1}{k}RT\frac{dV}{V}$$

soit encore :

$$\frac{dT}{T}+\frac{(k+1)(\gamma-1)}{k}\frac{dV}{V}=0$$

Cette relation s'intègre en : $T.V^{\frac{(k+1)(\gamma-1)}{k}}=Cte$. En identifiant avec $T.V^{(n-1)}=Cte$ - transformation polytropique – il vient :

$$\boxed{n=\gamma\left(1+\frac{1}{k}\right)-\frac{1}{k}}$$

35. Avec n = 1,1 et γ = 1,2 on obtient :

$$\boxed{k=\frac{\gamma-1}{n-\gamma}=-2}$$

36. La température du gaz dans l'état final est :

$$\boxed{T_1=T_0\left(\frac{V_0}{V_1}\right)^{n-1}=T_0\left(\frac{RT_0}{p_0V_1}\right)^{n-1}=289{,}1K}$$

37. La pression du gaz dans ce même état final est :

$$\boxed{p_1=p_0\left(\frac{V_0}{V_1}\right)^{n}=p_0\left(\frac{RT_0}{p_0V_1}\right)^{n}=2{,}67.10^5\,Pa}$$

38. Entre l'état initial I (p_0,V_0,T_0) et l'état final F (p_1,V_1,T_1) le travail échangé est donné par :

$$\boxed{W_{IF}=\int_I^F -p\,dV=-p_0V_0^n\int_I^F\frac{dV}{V^n}=\frac{1}{n-1}(p_1V_1-p_0V_0)}$$

39. Numériquement on obtient :

$$\boxed{W_{IF}=-0{,}9.10^3\,J\quad,\quad Q_{IF}=\frac{W_{IF}}{k}=0{,}45.10^3\,J}$$

40. La variation d'entropie au cours de cette transformation réversible est :

$$\boxed{S_{IF}=\int_I^F\frac{\delta Q}{T}=-\frac{R}{k}\int_I^F\frac{dV}{V}=-\frac{R}{k}\ln\left(\frac{V_1}{V_0}\right)}$$