ICNA - SESSION 2000
ÉPREUVE OPTIONNELLE DE PHYSIQUE
CORRIGÉ

Électromécanique.

1. On se place dans le référentiel $\mathcal{R}$ – supposé galiléen – lié à la partie fixe du circuit (*condensateur*, *profil circulaire*). La f.é.m. induite dans ce circuit, en notant M un point quelconque de la tige métallique T = OA, est définie par la circulation du champ électromoteur de Lorentz $\mathbf{E}_m = \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}$ le long du circuit, soit :

$$\boxed{e(t) = \oint_{\mathcal{C}} (\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}).\mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = \int_{OA} (\mathbf{v}(M/\mathcal{R}) \wedge \mathbf{B}).\mathrm{d}\mathbf{M} = \int_0^{\ell} \left[(r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta) \wedge (B\mathbf{e}_z)\right].(\mathrm{d}r\,\mathbf{e}_r) = \frac{1}{2}\ell^2 B\dot{\theta}}$$

Remarque. On peut aussi obtenir ce résultat à l'aide du flux coupé.

2. Si on néglige la résistance du circuit, l'intensité du courant induit est telle que :

$$\boxed{i(t) = \frac{\mathrm{d}q(t)}{\mathrm{d}t} = C\frac{\mathrm{d}e(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}C\ell^2 B\ddot{\theta}}$$

3. Le moment résultant des forces de Laplace par rapport à l'axe de rotation Δ = Oz est :

$$\boxed{M_L(\Delta) = \mathbf{M}_L(O).\mathbf{e}_z = \mathbf{e}_z.\int_{OA} \mathbf{OM} \wedge (i\,\mathrm{d}\mathbf{M} \wedge \mathbf{B}) = -\frac{1}{4}C\ell^4 B^2\ddot{\theta}}$$

4. On applique à la tige T le théorème du moment cinétique par rapport à Δ dans $\mathcal{R}$, soit :

$$\left[\frac{\mathrm{d}(\sigma(O, T/\mathcal{R}).\mathbf{e}_z)}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathcal{R}} = \left[\mathbf{M}_L(O) + \mathbf{M}(O/\Delta \to T) + \mathbf{OA} \wedge \mathbf{N} + \mathbf{OG} \wedge m\mathbf{g}\right].\mathbf{e}_z$$

Compte tenu que :

- ♦ $\sigma(O, T/\mathcal{R}).\mathbf{e}_z = I(\Delta)\dot{\theta} = \frac{1}{3}m\ell^2\dot{\theta}$
- ♦ $\mathbf{M}(O/\Delta \to T).\mathbf{e}_z = 0$ car la liaison pivot est supposée parfaite
- ♦ $\mathbf{OA} \wedge \mathbf{N} = \mathbf{0}$ car le contact tige/profil circulaire est sans frottement
- ♦ $(\mathbf{OG} \wedge m\mathbf{g}).\mathbf{e}_z = -\frac{1}{2}mg\ell\sin\theta$

on obtient l'équation différentielle du mouvement de T dans $\mathcal{R}$:

$$\ddot{\theta} + \frac{6mg}{4m\ell + 3C\ell^3 B^2}\sin\theta = 0$$

Au voisinage de la position d'équilibre stable, $\theta_e = 0$, de la tige cette équation différentielle se linéarise en :

$$\ddot{\theta} + \frac{6mg}{4m\ell + 3C\ell^3 B^2}\theta = 0$$

On a donc des oscillations harmoniques de pulsation :

$$\boxed{\omega_1 = \sqrt{\frac{6mg}{4m\ell + 3C\ell^3 B^2}}}$$

5. Si on remplace le condensateur par une bobine d'inductance propre L et de résistance négligeable l'équation électrique du circuit devient :

$$L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} = e(t) = \frac{1}{2}\ell^2 B\dot{\theta}$$

et s'intègre en :

$$i(t)=\frac{\ell^2 B}{2L}\theta(t)+K$$

où K est une constante dont la valeur dépend des conditions initiales.
Le moment des forces de Laplace par rapport à Δ – seul moment de force modifié – est alors :

$$M_L(\Delta)=-\frac{\ell^4 B^2}{4L}\theta+\frac{1}{2}\ell^2 BK$$

L'équation différentielle linéarisée du mouvement de la tige s'écrit :

$$\ddot{\theta}+\frac{3\ell^3B^2+6mgL}{4m\ell L}\theta=\frac{3B}{2m}K$$

On a de nouveau des oscillations harmoniques de pulsation :

$$\boxed{\omega_2=\sqrt{\frac{3\ell^3B^2+6mgL}{4m\ell L}}}$$

Ondes électromagnétiques dans un plasma neutre.

6. Équation du mouvement :
♦ d'un électron : $m\dot{\mathbf{v}}=-e\mathbf{E}$
♦ d'un ion : $M\dot{\mathbf{V}}=e\mathbf{E}$
Ces équations différentielles sont linéaires et à coefficients constants, on peut donc, en régime harmonique forcé à la pulsation ω, utiliser le formalisme complexe qui nous conduit à :

$$\underline{\mathbf{v}}=-i\frac{e}{m\omega}\underline{\mathbf{E}} \quad , \quad \underline{\mathbf{V}}=i\frac{e}{M\omega}\underline{\mathbf{E}}$$

On en déduit la densité volumique de courant :

$$\boxed{\underline{\mathbf{j}}=ne\underline{\mathbf{V}}+(-ne)\underline{\mathbf{v}}=i\frac{ne^2}{\omega}\left(\frac{M+m}{Mm}\right)\underline{\mathbf{E}}}$$

Notons que le milieu présente une conductivité purement imaginaire : densité volumique de courant et champ électrique sont en quadrature, donc en régime forcé l'onde ne cède aucune énergie aux charges.

7. Les équations de Maxwell, avec $\rho = 0$ et $\mathbf{j}\neq\mathbf{0}$, s'écrivent :

$$\nabla.\mathbf{B}=0\Rightarrow\mathbf{k}.\underline{\mathbf{B}}=0 \quad , \quad \nabla\wedge\mathbf{E}=-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\Rightarrow\mathbf{k}\wedge\underline{\mathbf{E}}=\omega\underline{\mathbf{B}}$$

$$\nabla.\mathbf{E}=0\Rightarrow\mathbf{k}.\underline{\mathbf{E}}=0 \quad , \quad \nabla\wedge\mathbf{B}=\mu_0\left(\mathbf{j}+\varepsilon_0\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}\right)\Rightarrow\mathbf{k}\wedge\underline{\mathbf{B}}=\mu_0\left(\frac{ne^2}{\omega}\left(\frac{M+m}{Mm}\right)-\varepsilon_0\right)\underline{\mathbf{E}}$$

On en déduit que **E** et **B** sont transverses et orthogonaux entre eux.

8. A l'aide des équations de Maxwell-Faraday et Maxwell-Gauss on peut écrire :

$$\mathbf{k}\wedge\underline{\mathbf{B}}=\frac{1}{\omega}\left[\mathbf{k}\wedge(\mathbf{k}\wedge\underline{\mathbf{E}})\right]=\frac{1}{\omega}\left[(\mathbf{k}.\underline{\mathbf{E}})\mathbf{k}-k^2\underline{\mathbf{E}}\right]=-\frac{k^2}{\omega}\underline{\mathbf{E}}$$

En identifiant avec l'équation de Maxwell-Ampère, en posant $\omega_p^2=\frac{ne^2}{\varepsilon_0}\frac{M+m}{Mm}$ (*pulsation plasma*) et compte tenu que $\varepsilon_0\mu_0c^2=1$, on obtient la relation de dispersion :

$$k^2=\frac{\omega^2}{c^2}\left[1-\frac{ne^2}{\varepsilon_0\omega^2}\frac{M+m}{Mm}\right]=\frac{\omega^2}{c^2}\left(1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)$$

9. On se place dans le cas où $\omega > \omega_p$, c'est-à-dire dans le cas où l'onde peut se propager dans le plasma puisque k est réel. On obtient alors une vitesse de phase :

$$\boxed{v_\varphi=\frac{\omega}{k}=\frac{\omega c}{\sqrt{\omega^2-\omega_p^2}}>c}$$

et en différentiant la relation de dispersion, $2k\,dk = \frac{2\omega}{c^2}d\omega$, une vitesse de groupe :

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{c}{\omega}\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2} < c$$

Notons que $\lim\limits_{\omega\to\infty} v_\varphi = c^+$, $\lim\limits_{\omega\to\infty} v_g = c^-$ et $v_g.v_\varphi = c^2$.

10. Pour une OPPH se propageant dans un milieu diélectrique LIH, non magnétique, en l'absence de charges et de courants, la relation de dispersion s'écrit : $k^2 = \mu_0\varepsilon\omega^2$. En identifiant avec la relation de dispersion obtenue à la question 8 il vient :

$$\varepsilon = \varepsilon_0\left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)$$

11. Il y aura réflexion totale si l'angle d'incidence i est tel que $\sin i \geq \sin i_t = \frac{n_s}{n_i}$, soit :

$$\cos i_t = \sqrt{1 - \sin^2 i_t} = \sqrt{1 - \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}} = \frac{\omega_p}{\omega}$$

Mécanique des fluides.

12. La plaque étant assimilé à un plan infini, l'écoulement est invariant par translation parallèlement au plan xOy donc : **v** = **v**(z,t).

L'incompressibilité du fluide se traduit par $\nabla.\mathbf{v} = 0$ soit $\frac{\partial v_z(z,t)}{\partial z} = 0$. Or, à tout instant $v_z(0,t) = 0$ car la plaque est imperméable au fluide ; il en résulte que $v_z(z,t) = 0$.

Le plan xOz est plan de symétrie du problème donc plan de symétrie pour le champ des vitesses et le champ de pression ce qui implique $v_y(z,t) = 0$ (**v** est un vecteur vrai) et $p = p(x,z,t)$.

En définitive le champ des vitesses du fluide est :

$$\mathbf{v} = v(z,t)\mathbf{e}_x$$

13. La force volumique de viscosité est définie par $\mathbf{f}_v = \eta\,\Delta\mathbf{v}$ soit dans la situation proposée :

$$\mathbf{f}_v = \eta\frac{\partial^2 v(z,t)}{\partial z^2}\mathbf{e}_x$$

14. Si on néglige les effets de la pesanteur, l'équation de Navier-Stokes pour un fluide newtonien s'écrit :

$$\rho\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho\left(\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}.\nabla)\mathbf{v}\right) = -\nabla p + \eta\,\Delta\mathbf{v}$$

Compte tenu que l'accélération convective est nulle, $(\mathbf{v}.\nabla)\mathbf{v} = \left(v(z,t)\frac{\partial}{\partial x}\right)v(z,t)\mathbf{e}_x = \mathbf{0}$, on obtient les deux équations scalaires :

$$\rho\frac{\partial v(z,t)}{\partial t} = -\frac{\partial p(x,z,t)}{\partial x} + \eta\frac{\partial^2 v(z,t)}{\partial z^2} \quad , \quad \frac{\partial p(x,z,t)}{\partial z} = 0$$

La deuxième équation s'intègre en $p(x,z,t) = K + f(x,t)$. Or, à l'altitude h – surface libre du liquide – on a à chaque instant et pour tout x : $p(x,h,t) = p_0 = K + f(x,t)$. Le champ de pression est donc uniforme et la première équation se réduit à :

$$\frac{\partial v(z,t)}{\partial t} = \frac{\eta}{\rho}\frac{\partial^2 v(z,t)}{\partial z^2}$$

15. C'est une équation de diffusion unidimensionnelle. Elle est linéaire et à coefficients constants ce qui nous permet d'utiliser, pour la résoudre, le formalisme complexe. En régime établi, à la pulsation ω, on peut chercher une solution de la forme :

$$v(z,t) = \Re e\{\underline{v}(z,t)\} = \Re e\{\underline{V}(z)\exp(i\omega t)\}$$

$\underline{V}(z)$ obéit à l'équation différentielle :

$$\frac{d^2\underline{V}(z)}{dz^2} - i\frac{\rho\omega}{\eta}\underline{V}(z) = 0$$

Si on pose $\delta = \sqrt{\frac{2\eta}{\rho\omega}}$ homogène à une longueur, elle admet une solution générale de la forme :

$$\underline{V}(z) = \underline{A}\exp\left[(1+i)\frac{z}{\delta}\right] + \underline{B}\exp\left[-(1+i)\frac{z}{\delta}\right]$$

La condition d'adhérence au contact de la plaque implique : $\underline{V}(0) = \underline{A} + \underline{B} = -iv_0$.
Par ailleurs, si on suppose la hauteur h de liquide suffisamment grande, la vitesse du fluide doit rester finie quand $z \to +\infty$ ce qui implique : $\underline{A} = 0$.

Il en résulte que $\underline{V}(z) = v_0\exp\left[-(1+i)\frac{z}{\delta} - i\frac{\pi}{2}\right]$, soit en définitive :

$$\boxed{v(z,t) = v_0\exp\left(-\frac{z}{\delta}\right)\sin\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right)}$$

L'oscillation de vitesse imposée par la plaque se propage dans le fluide en s'amortissant exponentiellement.

16. δ représente la profondeur de pénétration c'est-à-dire la distance par rapport à la plaque pour laquelle la vitesse est réduite d'un facteur 1/e.
Numériquement $\delta = 2{,}7$ mm

17. La plaque subit, de la part du fluide, une force par unité de surface :

$$\mathbf{F}_v = \eta\left(\frac{\partial v(z,t)}{\partial z}\right)_{z=0}\mathbf{e}_x = -\frac{\eta v_0}{\delta}\left(\sin(\omega t) + \cos(\omega t)\right)\mathbf{e}_x$$

Cette force tend à freiner la plaque. Il est donc nécessaire, qu'à chaque instant, l'opérateur applique une force directement opposée. La puissance moyenne par unité de surface développée par l'opérateur est alors :

$$\boxed{\langle \mathcal{P} \rangle = \langle -\mathbf{F}_v . \mathbf{v}_P \rangle = \frac{1}{2}\frac{\eta v_0^2}{\delta} = v_0^2\sqrt{\frac{\eta\rho\omega}{8}}}$$

Électrocinétique : régime sinusoïdal.

18. Il s'agit d'un problème d'adaptation d'impédance. Le dipôle d'impédance complexe $\underline{Z}_u$ est soumis à une tension d'amplitude complexe $\underline{U}_u = \frac{\underline{Z}_u}{\underline{Z}_g + \underline{Z}_u}\underline{E}$ et traversé par un courant dont l'intensité présente l'amplitude complexe $\underline{I} = \frac{\underline{E}}{\underline{Z}_g + \underline{Z}_u}$. La puissance moyenne absorbée par ce dipôle est alors :

$$\mathcal{P} = \frac{1}{2}\Re e\{\underline{u}_u . \underline{i}^*\} = \frac{R_u E_{eff}^2}{(R_g + R_u)^2 + (X_g + X_u)^2}$$

Cette puissance est maximale si on a simultanément $\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial X_u} = 0$ et $\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial R_u} = 0$. On en déduit aisément :

$$\boxed{R_u = R_g \text{ et } X_u = -X_g \Rightarrow \underline{Z}_u = \underline{Z}_g^*}$$

Il en résulte que : $\mathcal{P}_{max} = \dfrac{E_{eff}^2}{4R_g}$.

19. Le circuit proposé illustre la situation de la question précédente. Pour que la puissance consommée dans R_u soit maximale il faut que :

$$\boxed{R_u = R_g = 5\Omega}$$

20. Dans ce cas la puissance maximale consommée dans R_u est :

$$\boxed{\mathcal{P}_{u\,max} = \frac{E_{eff}^2}{4R_g} = 125\text{W}}$$

21. Pour le circuit proposé on a :

$$X_g = 0 \quad , \quad X_u = 2(L+M)\omega - \frac{1}{C\omega} = 2L\omega\left[\left(1+\frac{M}{L}\right) - \frac{1}{2LC\omega^2}\right]$$

Or, pour que la puissance moyenne absorbée par R_u soit maximale il faut que $X_u = -X_g = 0$, soit :

$$\boxed{\frac{M}{L} = \frac{1}{2LC\omega^2} - 1 = \frac{Z_C}{2Z_L} - 1 = \frac{5}{24} - 1 = -0{,}792}$$

Le coefficient de couplage est donc k = 0,792 et l'interrupteur dans la position (II) pour que M < 0.

22. La puissance moyenne fournie à R_u s'écrit :

$$\mathcal{P}_u = \frac{R_u E_{eff}^2}{|\underline{Z}|^2}$$

avec :

$$\underline{Z} = (R_g + R_u) + 2jL\omega\left[\left(1+\frac{M}{L}\right) - \frac{1}{2LC\omega^2}\right] = 15 + j\left(19 + 24\frac{M}{L}\right)$$

Il en résulte que :

- ♦ $|\underline{Z}| = |\underline{Z}|_{min} = 15\Omega$ si $\dfrac{M}{L} = -0{,}792$ c'est-à-dire si k = 0,792 et l'interrupteur en position (II) ;
- ♦ $|\underline{Z}| = |\underline{Z}|_{max} = 45{,}54\Omega$ si $\dfrac{M}{L} = 1$ c'est-à-dire si k = 1 et l'interrupteur en position (I).

Ainsi :

$$\boxed{\frac{R_u E_{eff}^2}{|\underline{Z}|_{max}^2} = 12\text{W} \le \mathcal{P}_u \le \frac{R_u E_{eff}^2}{|\underline{Z}|_{min}^2} = 111\text{W}}$$

Ondes dans les fluides.

23. On note $\zeta(x,t)$ le déplacement – de faible amplitude - du fluide en x à l'instant t sous l'action de l'onde acoustique.
Le théorème du centre de masse appliqué au volume particulaire constitué par une tranche de fluide comprise, au repos, entre les plans d'abscisses x et x + dx conduit, en projection suivant $\mathbf{e}_x$, à :

$$\rho(x,t)S\,dx\frac{dv(x,t)}{dt} = S\left[P(x+\zeta(x,t),t) - P(x+dx+\zeta(x+dx,t),t)\right] \approx S\left[P(x,t) - P(x+dx,t)\right]$$

Or, dans le cadre de l'approximation acoustique la vitesse particulaire v(x,t), l'écart de masse volumique $\rho_a(x,t) = \rho(x,t) - \rho_0$ et la surpression $p(x,t) = P(x,t) - P_0$ sont des infiniment petits du même ordre. Dans ce cas, à l'ordre le plus bas :

$$\rho(x,t)\frac{dv(x,t)}{dt} = \rho(x,t)\left[\frac{\partial v(x,t)}{\partial t} + v(x,t)\frac{\partial v(x,t)}{\partial x}\right] \approx \rho_0\frac{\partial v(x,t)}{\partial t} \quad , \quad P(x,t) - P(x+dx,t) \approx -\frac{\partial p(x,t)}{\partial x}dx$$

d'où l'équation aux dérivées partielles liant v(x,t) et p(x,t) :

$$\boxed{\rho_0 \frac{\partial v(x,t)}{\partial t} = -\frac{\partial p(x,t)}{\partial x}}$$

24. La conservation de la masse du volume particulaire précédent conduit à :

$$\rho(x,t) \approx \rho_0 \left(1 - \frac{\partial \zeta(x,t)}{\partial x}\right)$$

Par ailleurs, à partir du coefficient de compressibilité adiabatique, on obtient :

$$p(x,t) \approx \frac{1}{\chi_S}\left(\rho(x,t) - \rho_0\right) = -\frac{1}{\chi_S}\frac{\partial \zeta(x,t)}{\partial x}$$

En dérivant cette équation par rapport au temps il vient :

$$\boxed{\frac{\partial v(x,t)}{\partial x} = -\chi_S \frac{\partial p(x,t)}{\partial t}}$$

25. Par élimination de v(x,t) – ou p(x,t) – entre les équations obtenus aux questions précédentes on obtient l'équation de propagation (*équation de D'Alembert*) :

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\begin{pmatrix} v(x,t) \\ p(x,t) \end{pmatrix} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\begin{pmatrix} v(x,t) \\ p(x,t) \end{pmatrix} = 0$$

en posant :

$$\boxed{c = \frac{1}{\sqrt{\rho_0 \chi_S}}}$$

célérité de propagation de l'onde dans le gaz.

26. Le déplacement de la paroi étant très petit devant la longueur d'onde de l'onde acoustique, le théorème du centre de masse appliqué à la paroi donne suivant $\mathbf{e}_x$:

$$m\frac{du(t)}{dt} = S\left[P(0,t) - P_0\right] - 2\alpha m\omega_0 u(t) - m\omega_0^2 \int u(t)dt$$

Cette équation différentielle est linéaire et à coefficients constants, on peut donc, pour la résoudre, utiliser le formalisme complexe. Ainsi, en régime établi à la pulsation ω il vient :

$$m\left(2\alpha\omega_0 + i\left(\omega - \frac{\omega_0^2}{\omega}\right)\right)\underline{u}_0 = S\left(\underline{p}_{0i} + \underline{p}_{0r}\right)$$

On en déduit l'amplitude complexe de la vitesse de déplacement de la paroi :

$$\boxed{\underline{u}_0 = \frac{i\omega S\left(\underline{p}_{0i} + \underline{p}_{0r}\right)}{m\left(\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\alpha\omega_0\omega\right)}}$$

27. A chaque instant la vitesse de la paroi est égale à celle du fluide soit, comme le déplacement de la paroi est petit devant la longueur d'onde :

$$\underline{u}(t) = \underline{v}(0,t) = \underline{v}_i(0,t) + \underline{v}_r(0,t) = \frac{\omega\chi_S}{k}\left(\underline{p}_i(0,t) - \underline{p}_r(0,t)\right) = \frac{k}{\rho_0\omega}\left(\underline{p}_i(0,t) - \underline{p}_r(0,t)\right)$$

On en déduit aisément, en utilisant le résultat de la question précédente, le coefficient de réflexion en amplitude pour la surpression :

$$\boxed{\underline{r} = \frac{\underline{p}_{0i}}{\underline{p}_{0r}} = \frac{1 - \underline{A}(\omega)}{1 + \underline{A}(\omega)} \text{ avec } \underline{A}(\omega) = \frac{i\rho_0\omega^2 S}{mk\left(\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\alpha\omega_0\omega\right)}}$$

28. Si la paroi est maintenue immobile alors, à tout instant, sa vitesse est nulle donc $\underline{p}_i(0,t) = \underline{p}_r(0,t)$, soit $\underline{r} = 1$: il y a réflexion totale sans déphasage pour la surpression.

Thermodynamique.

29. Dans le compartiment (3) l'évolution du gaz est considérée comme isentropique (*adiabatique et réversible*) donc, en utilisant la formule de Laplace liant pression et température, $p^{(1-\gamma)}T^{\gamma} = \mathrm{Cte}$, il vient :

$$\boxed{p_f = p_0\left(\frac{T_0}{T_{3f}}\right)^{\gamma/(1-\gamma)} = p_0 a^{\gamma/(\gamma-1)}}$$

30. On utilise maintenant la formule de Laplace qui lie pression et volume, $pV^\gamma = \text{Cte}$, et qui nous donne :

$$\boxed{V_{3f} = V_0\left(\frac{p_0}{p_f}\right)^{1/\gamma} = V_0 a^{1/(1-\gamma)}}$$

31. A l'équilibre thermique et mécanique le gaz contenu dans le compartiment (1) et celui du compartiment (2) présentent le même état final. La conservation du volume total nous conduit à :

$$\boxed{V_{1f} = \frac{1}{2}\left(3V_0 - V_{3f}\right) = \frac{V_0}{2}\left(3 - a^{1/(1-\gamma)}\right)}$$

32. L'équation d'état des gaz parfaits nous donne : $\dfrac{p_f V_{1f}}{T_{1f}} = \dfrac{p_0 V_0}{T_0}$, d'où on tire la température finale du gaz du compartiment (1) (qui est aussi celle du gaz contenu dans le compartiment (2)) :

$$\boxed{T_{1f} = T_0 \frac{p_f}{p_0}\frac{V_{1f}}{V_0} = \frac{T_0}{2} a^{\gamma/(\gamma-1)}\left(3 - a^{1/(1-\gamma)}\right)}$$

33. Au cours de la transformation le système échange, avec le milieu extérieur, uniquement du travail (*fourni par le générateur*). Le bilan énergétique (*premier principe de la thermodynamique*) se traduit donc par :

$$\Delta U = \Delta U_1 + \Delta U_2 + \Delta U_3 + \Delta U_R = W_g$$

Or, $\Delta U_1 = \Delta U_2$ car les gaz contenus dans les compartiments (1) et (2) ont même état initial et même état final, et $\Delta U_R = 0$ car la capacité thermique de la résistance est supposée négligeable. Ainsi, en utilisant la première loi de Joule, il vient :

$$\boxed{W_g = \frac{R}{\gamma - 1}\left(2T_{f1} + T_{f3} - 3T_0\right)}$$

34. La variation d'entropie du système constitué uniquement par l'ensemble des gaz dans les trois compartiments est :

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 + \Delta S_3$$

avec :

- ♦ $\Delta S_3 = 0$ car l'évolution de ce gaz est isentropique ;
- ♦ $\Delta S_1 = \Delta S_2 = \dfrac{R}{\gamma - 1}\ln\left(\dfrac{T_{1f}}{T_0}\right) + R\ln\left(\dfrac{V_{1f}}{V_0}\right)$

Il en résulte que :

$$\boxed{\Delta S = 2R\left[\frac{1}{\gamma - 1}\ln\left(\frac{T_{1f}}{T_0}\right) + \ln\left(\frac{V_{1f}}{V_0}\right)\right]}$$

35. Le bilan entropique du système global se traduit par :

$$\Delta S_t = \Delta S + \Delta S_R = S_{éch} + S_p$$

Or, $S_{éch} = 0$ car le système est isolé et $\Delta S_R = 0$ car l'état thermodynamique de la résistance est supposé invariable. On en déduit :

$$\boxed{S_p = \Delta S = \frac{2\gamma R}{\gamma - 1}\ln\left(\frac{3a^{1/(\gamma-1)} - 1}{2}\right) > 0} \quad \text{(a > 1 et } \gamma > 1{,}4 \text{ pour un gaz diatomique)}$$

La transformation, bien que lente, n'est évidemment pas réversible (*passage du courant dans la résistance et effet Joule qui en résulte sont associés à des phénomènes irréversibles*).

Optique géométrique.

36. O est centre commun aux miroirs sphériques M_1 et M_2. Sachant que le centre d'un miroir sphérique est son propre conjugué il en résulte que $\overline{OA_i} = 0$.

37. Les points ***antiprincipaux*** (*intersection de l'axe optique et des plans antiprincipaux, plans conjugués de grandissement transversal* −1) d'un miroir sphérique sont confondus en son centre. Donc, pour le système optique considéré, le grandissement transversal est :

$$\boxed{G_t = G_{t1}.G_{t2} = (-1).(-1) = 1}$$

38. On a : $-\infty \xrightarrow{M_1} F_1 \xrightarrow{M_2} F_i$, c'est-à-dire que F_i est le conjugué image de F_1 dans M_2. En utilisant la formule de conjugaison des miroirs sphériques avec origine au centre il vient :

$$\frac{1}{\overline{OF_1}} + \frac{1}{\overline{OF_i}} = \frac{2}{\overline{OS_2}}$$

avec $\overline{OF_1} = \frac{1}{2}\overline{OS_1} = \frac{R_1}{2}$ et $\overline{OS_2} = R_2 = kR_1$ (k < 1).

On en déduit la distance focale de la lentille équivalente :

$$\boxed{f_i = \overline{OF_i} = \frac{kR_1}{2(1-k)} > 0}$$

39. On a simultanément $\overline{A_0A_i} = p_i - p_0 = D > 0$ et $G_t = \frac{\overline{OA_i}}{\overline{OA_0}} = \frac{p_i}{p_0} = m < 0$ puisque l'image est renversée. On en déduit respectivement :

$$\boxed{p_0 = \frac{D}{m-1} \quad , \quad p_i = \frac{mD}{m-1}}$$

40. De la formule de conjugaison de Descartes :

$$-\frac{1}{\overline{OA_0}} + \frac{1}{\overline{OA_i}} = \frac{1}{p_i} - \frac{1}{p_0} = \frac{1}{f_i}$$

On déduit une nouvelle expression de la distance focale de la lentille équivalente :

$$\boxed{f_i = -\frac{mD}{(m-1)^2} > 0}$$