ICNA - SESSION 2001
ÉPREUVE COMMUNE DE PHYSIQUE
CORRIGÉ

Électrostatique.

1. Un élément de surface $dS = \rho\, d\rho\, d\theta$ entourant le point M porte la charge électrique $dq = \sigma\, dS$ et crée au point P de l'axe Oz $\left(MP = \sqrt{\rho^2 + z^2}\right)$ un potentiel électrostatique :

$$dV(P) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{MP} = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\rho\, d\rho}{\sqrt{\rho^2+z^2}}\, d\theta$$

On en déduit, par intégration, le potentiel crée en ce point par l'ensemble du disque :

$$\boxed{V(P) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\sqrt{b^2+z^2} - |z|\right]}$$

2. Le champ électrostatique au point P est tel que :

$$\mathbf{E}(P) = -\frac{dV}{dz}\mathbf{e}_z = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\frac{|z|}{\sqrt{b^2+z^2}} - 1\right]\operatorname{sgn}(z)\mathbf{e}_z$$

avec sgn(z) = +1 pour z > 0 et sgn(z) = –1 pour z < 0.
Il en résulte que :

$$\boxed{\mathbf{E}(0^+) - \mathbf{E}(0^-) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\mathbf{e}_z}$$

Il y a discontinuité de la composante normale du champ électrostatique à la traversée d'une surface chargée.

Par ailleurs, si z << b on obtient :

$$\boxed{\mathbf{E}(P) \approx \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\operatorname{sgn}(z)\mathbf{e}_z}$$

Le champ électrostatique est uniforme par morceaux. Tout se passe comme si on était en présence d'un plan uniformément chargé.

3. Un raisonnement analogue à celui de la question **1** nous conduit à :

$$\boxed{V_1(P) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\sqrt{b^2+z^2} - \sqrt{b_0^2+z^2}\right]}$$

4. La charge électrique portée par la couronne est : $Q = \pi\sigma\left(b^2 - b_0^2\right)$. Si on suppose que $b - b_0 \ll b$ alors : $Q \approx 2\pi\sigma b\left(b - b_0\right)$; c'est la charge électrique d'une circonférence de rayon b portant la charge linéique :

$$\boxed{\lambda = \sigma\left(b - b_0\right)}$$

5. On utilise le résultat de la question 3 dans l'hypothèse où $e = b - b_0 \ll b$. Dans ce cas il vient :

$$V_1(P) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\sqrt{b^2+z^2} - \sqrt{b^2\left(1-\frac{\varepsilon}{b}\right)^2 + z^2}\right] \approx \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\sqrt{b^2+z^2}\left[1 - \sqrt{1 - \frac{2\varepsilon b}{\left(b^2+z^2\right)}}\right]$$

$$\approx \frac{\sigma b\left(b - b_0\right)}{2\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{b^2+z^2}} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{b^2+z^2}}$$

On en déduit le champ électrostatique au point P :

$$\boxed{\mathbf{E}_1(P) = -\frac{dV_1}{dz}\mathbf{e}_z = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{z}{\left(b^2+z^2\right)^{3/2}}\mathbf{e}_z}$$

Remarque. On peut aussi faire un calcul direct mais c'est un peu plus long.

Ce champ présente les mêmes extrema que la fonction $f(z) = \dfrac{z}{\left(b^2+z^2\right)^{3/2}}$, c'est-à-dire pour :

$$\boxed{z = \pm\frac{b}{\sqrt{2}}}$$

6. Un élément de longueur dz entourant le point P du segment [OA] porte la charge $dq = \lambda\,dz = \dfrac{Q}{b}dz$. Il subit, de la part du champ électrostatique créé par la circonférence, une force élémentaire :

$$d\mathbf{F} = \left(\frac{Q}{b}dz\right).\mathbf{E}_1(P) = \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 b}\frac{z\,dz}{\left(b^2+z^2\right)^{3/2}}\mathbf{e}_z$$

On en déduit, par intégration, la force totale qu'exerce la distribution linéique circulaire sur le segment [OA] :

$$\boxed{\mathbf{F} = \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 b^2}\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}\right)\mathbf{e}_z}$$

Électrocinétique : régime sinusoïdal.

7. L'impédance complexe du dipôle AB est :

$$\boxed{\underline{Z} = r + jL\omega + \frac{R}{1+jRC\omega} = r + \frac{R}{1+R^2C^2\omega^2} + j\omega\left(L - \frac{R^2C}{1+R^2C^2\omega^2}\right)}$$

8. v(t) et i(t) sont en phase si le dipôle est équivalent à une résistance pure c'est-à-dire si $\Im m\{\underline{Z}\} = 0$. Cette condition nous conduit à :

$$\boxed{R = \sqrt{\frac{L}{C\left(1-LC\omega^2\right)}}}$$

9. Dans ce cas $1 + R^2C^2\omega^2 = \dfrac{CR^2}{L}$ d'où :

$$\boxed{\underline{Z} = r + \frac{L}{CR}}$$

10. La condition de la question 8 ne peut être remplie que si $1 - LC\omega^2 \geq 0$ soit si :

$$\boxed{\omega \leq \omega_{max} = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 10^5\ \text{rad.s}^{-1}}$$

La plus petite valeur de R, compatible avec le résultat précédent, est obtenue pour $\omega = 0$ soit :

$$\boxed{R_{min} = \sqrt{\frac{L}{C}} = 10^3\,\Omega}$$

11. Pour $\omega = \omega_{max}$ la valeur de R est infinie ; on est alors en présence d'un circuit rLC série à la résonance donc son impédance est minimale et telle que :

$$\boxed{\underline{Z} = r}$$

12. Pour $\omega = \frac{\omega_{max}}{\sqrt{2}}$ on a $R = \sqrt{2\frac{L}{C}}$ donc $\underline{Z} = r + \sqrt{\frac{L}{2C}}$. La puissance moyenne $\mathcal{P}_r$ consommée dans la résistance r est alors :

$$\boxed{\mathcal{P}_r = \frac{1}{2} r \left(\frac{V_0}{r + \sqrt{\frac{L}{2C}}} \right)^2 = 58{,}6\text{mW}}$$

13. La puissance est uniquement consommée dans les résistances du dipôle. Soit $\mathcal{P} = \frac{1}{2} \frac{V_0^2}{r + \sqrt{\frac{L}{2C}}}$ la puissance moyenne totale consommée dans le dipôle alors, la puissance moyenne consommée dans la résistance R est :

$$\boxed{\mathcal{P}_R = \mathcal{P} - \mathcal{P}_r = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{L}{2C}} \frac{V_0^2}{\left(r + \sqrt{\frac{L}{2C}}\right)^2} = 141{,}4\text{mW}}$$

Mécanique du point.

14. Le point matériel P se déplace sans frottement sur le guide circulaire, il y a donc conservation de son énergie mécanique, soit :

$$\frac{1}{2} m v^2 + mgy = \frac{1}{2} m v_0^2 - mgb$$

On en déduit :

$$\boxed{v^2 = v_0^2 - 2g(y + b)}$$

Notons que cette vitesse peut s'annuler pour $y_0 = \frac{v_0^2}{2g} - b$. Ce point existe si $y_0 \le b$ soit $v_0 \le 2\sqrt{gb}$.

15. La deuxième loi de Newton appliquée à P dans le référentiel – supposé galiléen – lié au guide :

$$m\mathbf{a}(P/\mathcal{R}) = m\left(\frac{dv}{dt}\mathbf{e}_T + \frac{v^2}{b}\mathbf{e}_N\right) = \mathbf{N} + m\mathbf{g}$$

nous conduit en projection suivant $\mathbf{e}_N$ à :

$$m\frac{v^2}{b} = N - mg\cos\theta = N + mg\frac{y}{b}$$

avec $\theta = (-\mathbf{e}_y, \mathbf{OP})$.
On en déduit la réaction du guide :

$$\boxed{N(y) = \frac{m}{b}\left(v^2 - gy\right) = \frac{m}{b}\left(v_0^2 - 3gy - 2gb\right)}$$

16. La liaison étant supposée unilatérale, le mobile quitte le guide pour $y = y_1$ tel que $N(y_1) = 0$, soit :

$$\boxed{y_1 = \frac{v_0^2 - 2gb}{3g}}$$

Notons qu'à cet instant : $x_1 = \sqrt{b^2 - y_1^2}$.

17. Quand le mobile quitte le guide il présente une vitesse $\mathbf{v}_1$, de norme :

$$\boxed{v_1 = \sqrt{gy_1}}$$

et faisant avec $\mathbf{e}_x$ un angle $\alpha_1 = \text{Arc}\tan\left(\frac{y_1}{x_1}\right) + \frac{\pi}{2}$ soit :

$$\tan\alpha_1 = -\frac{x_1}{y_1}$$

18. Pour que la séparation ait effectivement lieu il faut que $0 \le y_1 \le b$ ce qui conduit, pour la vitesse initiale, à la condition :

$$\sqrt{2gb} = 1{,}71\text{m.s}^{-1} \le v_0 \le \sqrt{5gb} = 2{,}71\text{m.s}^{-1}$$

19. On suppose que le mobile quitte le guide pour $y_1 = \frac{b}{\sqrt{3}}$ ce qui impose une vitesse initiale :

$$v_0 = \sqrt{\left(2+\sqrt{3}\right)gb} = 2{,}34\text{m.s}^{-1}$$

20. Comme on néglige la résistance de l'air l'énergie mécanique du mobile se conserve au cours du mouvement, donc sa vitesse a même valeur en (b,0) sur le guide et lorsqu'il recoupe l'axe Ox après avoir quitté son support, soit :

$$v' = v(0) = \sqrt{v_0^2 - 2gb} = 1{,}60\text{m.s}^{-1}$$

21. P décrit, sous la seule action de la pesanteur, la ***parabole osculatrice*** en M (x_1,y_1) au guide. En ce point la vitesse de P est la même sur le guide et sur la parabole. Si on prend comme origine du temps l'instant où le mobile quitte son support, les équations paramétriques de la trajectoire sont :

$$x = v_1\cos\alpha_1\, t + x_1 \quad , \quad y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_1\sin\alpha_1\, t + y_1$$

d'où son équation cartésienne :

$$y = -\frac{g\left(1+\tan^2\alpha_1\right)}{2v_1^2}(x-x_1)^2 + \tan\alpha_1(x-x_1) + y_1$$

Compte tenu que $y_1 = \frac{b}{\sqrt{3}}$, $x_1 = \sqrt{\frac{2}{3}}b$, $v_1^2 = gy_1$ et $\tan\alpha_1 = -\frac{x_1}{y_1} = -\sqrt{2}$ il vient :

$$y = 2\sqrt{2}x\left(1 - \frac{3}{4}\sqrt{\frac{3}{2}}\frac{x}{b}\right)$$

Lorsque la parabole coupe l'axe Ox on a y = 0 ce qui nous conduit à x = 0 seule solution physiquement acceptable de l'équation précédente puisqu'on doit avoir $-b \le x \le b$.

Ondes électromagnétiques.

22. Le vecteur d'onde est :

$$\mathbf{k} = \frac{2\pi}{\lambda}\mathbf{u}_\Delta = \frac{2\pi N}{c}\mathbf{u}_\Delta = 4\left(\mathbf{u}_y + \mathbf{u}_z\right) \qquad \left(k = \|\mathbf{k}\| = 4\text{m}^{-1}\right)$$

23. Les plans d'onde sont orthogonaux à la direction de propagation ; or, $\mathbf{u}_x.\mathbf{u}_\Delta = 0$, donc les plans d'onde sont parallèles à l'axe Ox.

24. Sachant qu'à l'instant t = 0, le plan d'onde contient l'origine O du repère, l'onde atteindra le point M (x,y,z) à l'instant t_M tel que :

$$t_M = \frac{\mathbf{u}_\Delta.\mathbf{OM}}{c} = \frac{y+z}{\sqrt{2}c} = 2\mu\text{s}$$

25. On suppose que la phase est nulle en O à l'instant t = 0. Son expression, en un point P (x,y,z) à l'instant de date t est alors :

$$\Phi(x,y,z,t) = \mathbf{k}.\mathbf{OP} - \omega t = 4(y+z) - 17.10^8\, t$$

26. La puissance moyenne rayonnée à travers une surface unité perpendiculaire à la direction de propagation est égale au flux du vecteur de Poynting moyen à travers cette surface, soit :

$$\langle \mathcal{P} \rangle = \iint_S \langle \mathbf{R} \rangle . (dS\, \mathbf{u}_\Delta)$$

Comme l'onde est plane **E** est orthogonal à $\mathbf{u}_\Delta$ et $\mathbf{B} = \frac{\mathbf{u}_\Delta \wedge \mathbf{E}}{c}$. Il en résulte que :

$$\langle \mathbf{R} \rangle = \frac{1}{\mu_0 c} \langle \mathbf{E} \wedge (\mathbf{u}_\Delta \wedge \mathbf{E}) \rangle = \varepsilon_0 c \left\langle \|\mathbf{E}\|^2 \right\rangle \mathbf{u}_\Delta = \frac{\varepsilon_0 c}{2} \left(E_{0x}^2 + E_{0y}^2 + E_{0z}^2 \right) \mathbf{u}_\Delta = \frac{\varepsilon_0 c}{2} E_0^2 \mathbf{u}_\Delta$$

Ainsi pour la surface unité :

$$\langle \mathcal{P} \rangle = \frac{\varepsilon_0 c}{2} E_0^2$$

d'où on déduit l'amplitude du champ électrique :

$$\boxed{E_0 = \sqrt{\frac{2\langle \mathcal{P} \rangle}{\varepsilon_0 c}} = 4{,}25 \mathrm{V.m^{-1}}}$$

27. Le vecteur champ électrique reste toujours parallèle au plan yOz donc $E_{0x} = 0$.
E est orthogonal à $\mathbf{u}_\Delta$ ce qui implique $E_{0y} = E_{0z}$.

Enfin $E_0^2 = E_{0y}^2 + E_{0z}^2$ conduit, compte tenu qu résultat précédent, à $E_{0y} = E_{0z} = \frac{E_0}{\sqrt{2}} = 3 \mathrm{V.m^{-1}}$.

En définitive le champ électrique associé à cette onde est tel que :

$$\boxed{\mathbf{E} = 3(\mathbf{u}_y - \mathbf{u}_z)\cos\Phi}$$

28. **E** est toujours parallèle au plan yOz donc l'onde est polarisée rectilignement et yOz est le plan de polarisation.

29. Le vecteur champ magnétique de cette onde est :

$$\boxed{\mathbf{B} = \frac{\mathbf{u}_\Delta \wedge \mathbf{E}}{c} = -1{,}4.10^{-8} \cos\Phi\, \mathbf{u}_x}$$

Électromécanique.

30. D'après la loi de Lenz le sens du courant induit est tel que par ses effets il s'oppose à la cause qui lui donne naissance. Le courant induit, dû au déplacement de la barre plongée dans le champ magnétique **B**, uniforme et constant, génère, sur cette partie mobile du circuit, une force de Laplace ; celle-ci, pour s'opposer au mouvement de MN, doit être dirigée dans le sens opposé de $-\mathbf{u}_x$. Le courant induit circule donc de M vers N.

31. On se place dans le référentiel lié aux rails et on détermine la f.é.m. induite e en calculant la circulation du champ électromoteur $\mathbf{E}_m = \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}$ le long du contour fermé $N_0OM_0MNN_0$, soit :

$$\boxed{e = \oint_{\mathcal{C}} (\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}).d\ell = \int_{MN} (\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}).d\ell = (\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}).\mathbf{MN} = [(v\mathbf{u}_x) \wedge (B\mathbf{u}_z)].(-b\mathbf{u}_y) = vbB = 1{,}2\mathrm{V}}$$

Remarque. On peut aussi effectuer ce calcul à l'aide du flux coupé.

32. Si on néglige la résistance des rails et celle de la barre devant celle du résistor branché entre N_0 et M_0 on a e = Ri, d'où on déduit l'intensité du courant induit :

$$\boxed{i = \frac{e}{R} = 600\mathrm{mA}}$$

La puissance électrique induite dans la barre est alors :

$$\boxed{\mathcal{P} = -ei = -720\mathrm{mW}}$$

33. Pour déplacer la barre à la vitesse constante $\mathbf{v} = v\mathbf{u}_x$ ($v > 0$) il faut que l'opérateur exerce sur celle-ci une force **F** dirigée dans le sens des $x > 0$ et dont l'intensité, puisqu'il n'y a pas de frottement, soit telle que :

$$F = \mathbf{F}.\mathbf{u}_x = (-\mathbf{F}_L).\mathbf{u}_x = \mathbf{u}_x.\left(-\int_{MN}(i\,d\ell)\wedge\mathbf{B}\right) = \mathbf{u}_x.(\mathbf{B}\wedge(i\,\mathbf{MN})) = ibB = 4{,}8.10^{-2}\,N$$

34. La puissance électrique induite dans la barre s'annule avec le courant induit ce qui se produit pour une vitesse $v = v_1$ telle que :

$$E + v_1 bB = 0$$

d'où :

$$v_1 = -\frac{E}{bB} = -17{,}5\,m.s^{-1}$$

35. L'intensité du courant induit dans le circuit est $i = \frac{E+e}{R+r} = \frac{E+vbB}{R+r}$ d'où la puissance électrique induite dans la barre :

$$\mathcal{P}' = -ei = -\frac{vbB(E+vbB)}{R+r}$$

Cette puissance passe par un extremum – qui est un maximum - pour la vitesse : $v_m = -\frac{E}{2bB} = \frac{v_1}{2} \in [v_1, 0]$, d'où la valeur correspondante de $\mathcal{P}'$:

$$\mathcal{P}'_m = \frac{E^2}{4(R+r)} = 196\,mW$$

36. Si $v < v_1$ alors $\mathcal{P}' < 0$: le dipôle fonctionne en générateur.

Thermodynamique.

37. En utilisant l'équation d'état des gaz parfaits on obtient :

$$m_A = n_A M = \frac{Mp_A V_A}{RT_A} = 2\,kg \quad , \quad m_B = n_B M = \frac{Mp_B V_B}{RT_B} = 3\,kg$$

38. On considère que le mélange se comporte aussi comme un gaz parfait. Il en résulte que la température finale du mélange à l'équilibre est :

$$T_e = \frac{M(V_A + V_B)p_e}{R(m_A + m_B)} = 305{,}4\,K \Rightarrow \theta_e = 32{,}4°C$$

39. Au cours de la transformation précédente il n'y a aucun travail mis en jeu. Le bilan énergétique du système se traduit donc par : $\Delta U = \Delta U_A + \Delta U_B = Q$. Sachant qu'un gaz parfait suit la première loi de Joule il vient :

$$Q = \frac{R}{M(\gamma - 1)}\left[(m_A + m_B)T_e - (m_A T_A + m_B T_B)\right] = -24{,}5\,kJ$$

40. Dans ce cas le bilan énergétique du système s'écrit :

$$\Delta U' = \frac{R}{M(\gamma - 1)}\left[(m_A + m_B)T'_e - (m_A T_A + m_B T_B)\right] = 0$$

d'où la nouvelle température d'équilibre :

$$T'_e = \frac{m_A T_A + m_B T_B}{m_A + m_B} = 312\,K \Rightarrow \theta'_e = 39°C$$

Résultat cohérent avec celui obtenu à la question 38 car ici aucune énergie calorifique n'a été évacuée.