ICNA - SESSION 2002
ÉPREUVE COMMUNE DE PHYSIQUE
CORRIGÉ

Électrostatique.

1. La distribution de charges admet le plan médiateur et le plan contenant le segment et le point O comme plans de symétrie. **E**, vecteur vrai, appartient à ces plans donc à leur intersection : **E**(O) est colinéaire à **HO**.

Dans la suite on travaillera dans le repère orthonormé direct (H,$\mathbf{e}_x$,$\mathbf{e}_y$,$\mathbf{e}_z$) avec $\mathbf{e}_x = \dfrac{\mathbf{HO}}{\|\mathbf{HO}\|}$ et $\mathbf{e}_z = \dfrac{\mathbf{HA}_2}{\|\mathbf{HA}_2\|}$.

2. Un élément du segment de longueur dz, entourant le point courant P, porte la charge dq = λdz. Il crée en O le champ électrostatique élémentaire :

$$d\mathbf{E}(O) = \frac{\lambda\, dz}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathbf{PO}}{\|\mathbf{PO}\|^3} = \frac{\lambda\, dz}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\left(\frac{a}{2}\mathbf{e}_x - z\,\mathbf{e}_z\right)}{\left(\frac{a^2}{4}+z^2\right)^{3/2}}$$

Le champ total en ce point est **E**(O) = E(O)$\mathbf{e}_x$ avec :

$$E(O) = \int_{A_1}^{A_2} d\mathbf{E}(O).\mathbf{e}_x = \frac{\lambda a}{8\pi\varepsilon_0}\int_{-a/2}^{a/2}\frac{dz}{\left(\frac{a^2}{4}+z^2\right)^{3/2}}$$

Or, $\left(\dfrac{a^2}{4}+z^2\right)^{-3/2} = \dfrac{8}{a^3}\cos^3\theta$ et $\dfrac{2z}{a} = \tan\theta$ soit $dz = \dfrac{a}{2}\dfrac{d\theta}{\cos^2\theta}$. Il en résulte que :

$$\boxed{E(O) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 a}\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\cos\theta\, d\theta = \frac{\lambda}{\sqrt{2}\pi\varepsilon_0 a}}$$

3. Le champ $\mathbf{E}_T$(O) est porté par l'axe de symétrie c'est-à-dire la droite (A_1O). Son intensité est telle que :

$$\boxed{E_T(O) = \frac{2}{\sqrt{2}}E(O) = \frac{\lambda}{\pi\varepsilon_0 a}}$$

4. Au centre du carré le champ total est nul.

5. Le champ électrostatique créé en O par la demi-droite (A_1A_2) s'obtient en intégrant le champ élémentaire de la question 2, soit :

$$\mathbf{E}(O) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 a}\int_{-\pi/4}^{\pi/2}\cos\theta\, d\theta\, \mathbf{e}_x - \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-a/2}^{+\infty}\frac{z\, dz}{\left(\frac{a^2}{4}+z^2\right)^{3/2}}\mathbf{e}_z = \frac{\lambda}{2\sqrt{2}\pi\varepsilon_0 a}\left(\left(1+\sqrt{2}\right)\mathbf{e}_x - \mathbf{e}_z\right)$$

Sa composante suivant A_1O est alors :

$$\boxed{E_1(O) = \mathbf{E}(O).\frac{\mathbf{A_1O}}{\|\mathbf{A_1O}\|} = \mathbf{E}(O).\mathbf{u} = \frac{\lambda}{2\sqrt{2}\pi\varepsilon_0 a}\left(\left(1+\sqrt{2}\right)\mathbf{e}_x - \mathbf{e}_z\right).\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_z\right) = \frac{\lambda}{2\sqrt{2}\pi\varepsilon_0 a}}$$

6. Le champ total créé en O par les deux demi-droites est alors : $\mathbf{E'}_T(O) = \dfrac{\sqrt{2}\lambda}{2\pi\varepsilon_0 a}\mathbf{u}$.

Par ailleurs pour une droite infinie située à la distance $\dfrac{a}{\sqrt{2}}$ de O le théorème de Gauss nous conduit à :

$\mathbf{E''}_T(O) = \dfrac{\sqrt{2}\lambda}{2\pi\varepsilon_0 a}\mathbf{u}$.

On a donc $\mathbf{E''}_T(O) = \mathbf{E'}_T(O)$ résultat cohérent avec le fait que $\mathbf{E'}_T(O)$ est indépendant de l'angle entre les deux demi-droites et ne dépend que de la distance de A_1 à O.

Magnétostatique.

7. Cette distribution de courants admet :

♦ xOz comme plan d'antisymétrie donc **B** appartient à ce plan ;

♦ yOz comme plan de symétrie donc **B** est orthogonal à ce plan.

Il en résulte que **B**(M) est parallèle à Ox.

8. L'élément de courant $I.d\ell = Ib\,d\theta\,\mathbf{e}_\theta = Ib\,d\theta\left(-\sin\theta\,\mathbf{e}_x + \cos\theta\,\mathbf{e}_y\right)$ entourant le point courant P crée en M le champ magnétique élémentaire, donné par la loi de Biot-Savart :

$$d\mathbf{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{d\ell \wedge \mathbf{PM}}{\|\mathbf{PM}\|^3}$$

avec $\mathbf{PM} = z\,\mathbf{e}_z - b\mathbf{e}_r = -b(\cos\theta\,\mathbf{e}_x + \sin\theta\,\mathbf{e}_y) + z\,\mathbf{e}_z$, soit :

$$d\mathbf{B}(M) = \frac{\mu_0 Ib}{4\pi\left(z^2+b^2\right)^{3/2}}\left(b\,\mathbf{e}_z + z\sin\theta\,\mathbf{e}_y + z\cos\theta\,\mathbf{e}_x\right)d\theta$$

On obtient la contribution de la partie supérieure en sommant de –π/2 à π/2 et celle de la partie inférieure en sommant de π/2 à 3π/2 après avoir changé I en –I. Il en résulte que :

$$\boxed{\mathbf{B}(M) = \frac{\mu_0 Ibz}{\pi\left(z^2+b^2\right)^{3/2}}\mathbf{e}_x}$$

9. Le dipôle magnétique, de moment $\mathbf{M} = M\mathbf{e}_x$, placé sur l'axe Oz dans le champ magnétique **B** présente une énergie potentielle d'interaction $E_p = -\mathbf{M}.\mathbf{B}$. La résultante **F** des forces qu'exerce le champ magnétique sur ce dipôle est :

$$\boxed{\mathbf{F} = -\nabla(-\mathbf{M}.\mathbf{B}) = \frac{\mu_0 MIb}{\pi}\frac{b^2-2z^2}{\left(z^2+b^2\right)^{5/2}}\mathbf{e}_z}$$

10. Le dipôle est en équilibre quand **F** = **0** (*extrema de* E_p) soit pour :

$$\boxed{z_1 = \frac{b}{\sqrt{2}} \text{ ou } z_2 = -\frac{b}{\sqrt{2}}}$$

11. Pour déterminer la nature de l'équilibre on étudie le signe de :

$$\frac{df(z)}{dz} = \frac{d}{dz}\left(\frac{2z^2-b^2}{\left(z^2+b^2\right)^{5/2}}\right) = \frac{3z\left(3b^2-2z^2\right)}{\left(z^2+b^2\right)^{7/2}}$$

Pour $z = z_1$ on a $\left(\dfrac{df(z)}{dz}\right)_{z_1} > 0$: l'équilibre est ***stable*** car il correspond à un minimum de E_p.

Pour $z = z_2$ on a $\left(\dfrac{df(z)}{dz}\right)_{z_2} < 0$: l'équilibre est ***instable*** car il correspond à un maximum de E_p.

Remarque. Ce résultat était assez évident compte tenu que B(z) est une fonction impaire de z.

Cinématique du point.

12. La dérivation par rapport au temps de $y^2 = 2px$ conduit à $y.\dot{y} = p\dot{x}$ soit $yY = pX$ puisque $X = \dot{x}$ et $Y = \dot{y}$. D'autre part l'hodographe a pour équation cartésienne $X^2 = 2qY$. On déduit aisément des ces relations :

$$X = \frac{2pq}{y} \quad , \quad Y = \frac{2p^2q}{y^2}$$

13. Les composantes du vecteur accélération sont respectivement :

$$\ddot{x} = \dot{X} = -\frac{2pq}{y^2}\dot{y} = -\frac{2pq}{y^2}Y = -\frac{4p^3q^2}{y^4} = -\frac{8p^4q^2}{y^6}\left(\frac{y^2}{2p}\right) = -\frac{8p^4q^2}{y^6}x$$

$$\ddot{y} = \dot{Y} = -\frac{4p^2q}{y^3}\dot{y} = -\frac{4p^2q}{y^3}Y = -\frac{8p^4q^2}{y^6}y$$

Il en résulte que :

$$\mathbf{a}(P/\mathcal{R}) = -\frac{8p^4q^2}{y^6}\left(x\,\mathbf{e}_x + y\,\mathbf{e}_y\right) = -\frac{8p^4q^2}{y^6}\mathbf{OP}$$

Le mouvement de P est un mouvement à ***accélération centrale***.

14. On a $\dot{x} = \frac{2\sqrt{pq}}{\sqrt{2x}}$ et $\dot{y} = \frac{2p^2q}{y^2}$. Compte tenu qu'à l'instant initial x(0) = 0 et y(0) = 0, ces deux équations s'intègrent en :

$$x(t) = \frac{\left(6p^2qt\right)^{2/3}}{2p} \quad , \quad y(t) = \left(6p^2qt\right)^{1/3}$$

15. On a par définition : $\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{OP} \wedge \mathbf{V}(P/\mathcal{R})\right).\mathbf{e}_z$ car le mouvement, à accélération centrale, s'effectue dans le plan xOy. Il en résulte que :

$$\frac{dS}{dt} = \frac{x\dot{y} - \dot{x}y}{2} = -\frac{pq}{2}$$

Électrocinétique : régime sinusoïdal.

16. L'impédance du dipôle AB est :

$$\underline{Z} = \frac{1}{jC_2\omega} + \frac{1}{jC_1\omega + \frac{1}{jL_1\omega}} = -\frac{j}{C_2\omega}\,\frac{1 - L_1(C_1 + C_2)\omega^2}{1 - L_1C_1\omega^2}$$

17. L'intensité qui traverse C_2 est l'intensité à travers le dipôle, soit :

$$\underline{i}(t) = \frac{\underline{v}(t)}{\underline{Z}} = \frac{jC_2\omega\left(1 - L_1C_1\omega^2\right)}{1 - L_1(C_1 + C_2)\omega^2}\underline{v}(t)$$

d'où on déduit :

$$i(t) = \Re e\{\underline{i}(t)\} = \frac{-C_2\omega\left(1 - L_1C_1\omega^2\right)}{1 - L_1(C_1 + C_2)\omega^2}V_0\sin(\omega t)$$

18. L'ensemble (L_1, C_1) est un diviseur de courant, d'où :

$$\underline{i}_1(t) = \frac{\underline{Y}_L}{\underline{Y}_L + \underline{Y}_C}\underline{i}(t) = \frac{1}{1 - L_1C_1\omega^2}\underline{i}(t) \quad , \quad \underline{i}'_1(t) = \frac{\underline{Y}_C}{\underline{Y}_L + \underline{Y}_C}\underline{i}(t) = \frac{-L_1C_1\omega^2}{1 - L_1C_1\omega^2}\underline{i}(t)$$

On en déduit, compte tenu du résultat de la question précédente :

$$\boxed{\begin{aligned} i_1(t) &= \Re e\{\underline{i}_1(t)\} = \frac{-C_2\omega}{1-L_1(C_1+C_2)\omega^2} V_0 \sin(\omega t) \\ i'_1(t) &= \Re e\{\underline{i}'_1(t)\} = \frac{L_1C_1C_2\omega^3}{1-L_1(C_1+C_2)\omega^2} V_0 \sin(\omega t) \end{aligned}}$$

19. i(t) = 0 – circuit bouchon – pour :

$$\boxed{\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{L_1C_1}}}$$

L_1 et C_1 sont en résonance. Le courant ne circule que dans la maille (L_1,C_1) ; ce régime permanent n'est possible qu'en l'absence de toute perturbation.

i(t) est infinie pour :

$$\boxed{\omega_2 = \frac{1}{\sqrt{L_1(C_1+C_2)}}}$$

C'est la pulsation de résonance du circuit série $(L_1,(C_1+C_2))$, circuit que l'on obtient en transformant la source de tension avec C_2 en série à l'aide de la représentation de Norton.

20. Numériquement on obtient :

$$\boxed{L_1 = \frac{1}{4\pi^2 f_1^2 C_1} = 72{,}4\text{mH} \quad , \quad C_2 = C_1\left(\frac{f_1^2}{f_2^2}-1\right) = 42\text{nF}}$$

21. Si L_1 et C_2 sont en résonance, c'est-à-dire si $\omega = \omega_3 = \dfrac{1}{\sqrt{L_1C_2}}$ alors :

$$\boxed{i'_1(t) = -\sqrt{\frac{C_2}{L_1}} V_0 \sin(\omega_3 t) = -C_2\omega_3 V_0 \sin(\omega_3 t) = -15{,}2\sin(18{,}1.10^3\, t)}$$

Le courant $i'_1(t)$ est indépendant de C_1 : la capacité C_1 est alimentée par un générateur équivalent à un générateur parfait de Norton.

Ondes électromagnétiques.

22. Numériquement on obtient :

$$\boxed{\omega = 2\pi f = 10^{11}\,\text{rad.s}^{-1} \quad , \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi f}{c} = 335\text{m}^{-1}}$$

23. On a :

$$\boxed{\mathbf{B} = \Re e\{\underline{\mathbf{B}}\} = \frac{E_0}{c}\left[\sin(kx-\omega t)\mathbf{e}_y + p\cos(kx-\omega t)\mathbf{e}_z\right]}$$

Les composantes de **B** sont en quadrature.

24. On est en présence d'une onde plane donc :

$$\boxed{\mathbf{E} = -c\,\mathbf{e}_x \wedge \mathbf{B} = E_0\left[p\cos(kx-\omega t)\mathbf{e}_y - \sin(kx-\omega t)\mathbf{e}_z\right]}$$

25. Pour p = 0 l'onde est polarisée rectilignement selon Oz. Pour p = 1 elle est circulaire droite.

26. La valeur moyenne temporelle de la norme du vecteur de Poynting de l'onde est :

$$\boxed{\langle\|\mathbf{R}\|\rangle_t = \frac{1}{\mu_0}\langle\|\mathbf{E}\wedge\mathbf{B}\|\rangle_t = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c}(p^2+1)}$$

27. Pour p = 0 et pour une surface unité orthogonale à la direction de propagation de l'onde on a : $\mathcal{P} = \langle\|\mathbf{R}\|\rangle_t = \dfrac{E_0^2}{2\mu_0 c}$, d'où on déduit l'amplitude des champs électrique et magnétique de l'onde :

$$\boxed{E_0 = \sqrt{2\mu_0 c \mathcal{P}} = 17{,}37\,\mathrm{V.m^{-1}} \quad , \quad B_0 = \frac{E_0}{c} = 5{,}8.10^{-8}\,\mathrm{T}}$$

28. Toujours dans l'hypothèse p = 0, le flux magnétique qui traverse le cadre est maximal si la normale au cadre a même direction et même sens que **B**. Dans ce cas :

$$\Phi(t) = n\frac{E_0}{c}\iint_S \sin(kx - \omega t)\,dx\,dz = n\frac{E_0}{c}\int_{-b}^{b} dz \int_{-b}^{b} \sin(kx - \omega t)\,dx$$

soit :

$$\boxed{\Phi(t) = -\frac{4bnE_0}{\omega}\sin(kb)\sin(\omega t)}$$

29. Il apparaît alors dans le cadre une f.é.m. induite dont l'expression est donnée par la loi de Faraday :

$$\boxed{e(t) = -\frac{d\Phi(t)}{dt} = 4bnE_0\sin(kb)\cos(\omega t) = 111\cos\left(10^{11}t\right)}$$

Mécanique du solide.

30. Par définition du centre d'inertie d'un ensemble de solides homogènes on a :

$$\frac{3}{2}m\mathbf{IG} = \frac{m}{2}\mathbf{IA}$$

G se trouve sur la droite (IA) et tel que :

$$\boxed{IG = \frac{b}{3}}$$

31. L'énergie mécanique du système est $E_m = E_k + E_p$. Son énergie cinétique est la somme de l'énergie cinétique du cerceau et de l'énergie cinétique de la surcharge, soit :

$$E_k = \frac{1}{2}\left(mb^2\right)\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{m}{2}\right)(b\dot{\varphi})^2 = \frac{3}{4}mb^2\dot{\varphi}^2$$

L'énergie potentielle est uniquement due à la pesanteur soit, à une constante additive près :

$$E_p = -m\mathbf{g}.\mathbf{OI} - \frac{m}{2}\mathbf{g}.\mathbf{OA} = \frac{3}{2}mgb\left(1 + \frac{1}{3}\sin\varphi\right)$$

En définitive :

$$\boxed{E_m = \frac{3}{2}mgb\left(1 + \frac{1}{3}\sin\varphi\right) + \frac{3}{4}mb^2\dot{\varphi}^2}$$

32. Toute les liaisons étant parfaites l'énergie mécanique du système se conserva au cours du temps. Compte tenu des conditions initiales il vient :

$$\frac{1}{2}mgb\sin\varphi + \frac{3}{4}mb^2\dot{\varphi}^2 = \frac{3}{4}mb^2\dot{\varphi}_0^2$$

soit :

$$\dot{\varphi}^2 = \dot{\varphi}_0^2 - \frac{2}{3}\frac{g}{b}\sin\varphi$$

Le mouvement du système est révolutif si $\dot{\varphi}$ ne s'annule jamais et garde un signe constant au cours du mouvement. Compte tenu que $|\sin\varphi| \le 1$ et $\dot{\varphi}_0 > 0$ cela impose :

$$\boxed{\dot{\varphi}_0 \ge \sqrt{\frac{2g}{3b}}}$$

33. $\frac{dE_m}{dt} = 0$ nous conduit à l'équation différentielle en φ du mouvement du système, soit :

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{3b}\cos\varphi = 0$$

On linéarise cette équation au voisinage de la position d'équilibre stable $\varphi_e = -\frac{\pi}{2}$ en posant $\varepsilon = \varphi - \varphi_e$, avec ε, $\dot{\varepsilon}$ et $\ddot{\varepsilon}$ infiniment petits du même ordre. Il en résulte :

$$\ddot{\varepsilon} + \frac{g}{3b}\varepsilon = 0$$

équation différentielle d'un oscillateur harmonique de période :

$$\boxed{T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{3b}{g}}}$$

Thermodynamique.

34. Pour la transformation isobare $0 \rightarrow 1$ le travail reçu par le gaz est :

$$\boxed{W_{01} = -p_0(3V_0 - V_0) = -2p_0V_0 = -4\text{kJ}}$$

et la quantité de chaleur :

$$\boxed{Q_{01} = \Delta H_{01} = \frac{\gamma R}{\gamma - 1}(T_0 - T_1) = \frac{2\gamma p_0 V_0}{\gamma - 1} = 10\text{kJ}}$$

car un gaz parfait suit la deuxième loi de Joule.

35. La variation d'énergie interne est donnée par le premier principe de la thermodynamique :

$$\boxed{\Delta U_{01} = W_{01} + Q_{01} = 6\text{kJ}}$$

La variation d'entropie, pour cette transformation réversible, est :

$$\boxed{\Delta S_{01} = \frac{\gamma R}{\gamma - 1}\ln\left(\frac{T_1}{T_0}\right) = \frac{\gamma R}{\gamma - 1}\ln 3 = 22{,}8\text{J.K}^{-1}}$$

36. Pour la transformation isotherme $1 \rightarrow 2$ on a :

$$\boxed{W_{12} = -\int_1^2 p\,dV = -3p_0V_0\int_{3V_0}^{V_0}\frac{dV}{V} = 3p_0V_0\ln 3 = -Q_{12} = 6{,}6\text{kJ}}$$

37. La variation d'énergie interne est :

$$\boxed{\Delta U_{12} = 0}$$

car un gaz parfait suit la première loi de Joule.

La variation d'entropie est égale à l'entropie échangée car la transformation est réversible, soit :

$$\boxed{\Delta S_{12} = \frac{Q_{12}}{T_1} = \frac{RQ_{12}}{3p_0V_0} = -9{,}1\text{J.K}^{-1}}$$

38. U et S étant des fonctions d'état leur variation au cours d'un cycle est nulle. Il en résulte, pour la transformation isochore $2 \rightarrow 0$, une variation d'énergie interne :

$$\boxed{\Delta U_{20} = -(\Delta U_{01} + \Delta U_{12}) = -6\text{kJ}}$$

et une variation d'entropie :

$$\boxed{\Delta S_{20} = -(\Delta S_{01} + \Delta S_{12}) = -13{,}7\text{J.K}^{-1}}$$

39. On a $b \ll V$ et $a \ll RTV$ ce qui nous permet d'écrire :

$$p = \frac{RT}{V - b}\exp\left(-\frac{a}{RTV}\right) \approx \frac{RT}{V}\left[\left(1 + \frac{b}{V} - \frac{b^2}{V^2} + \ldots\right)\left(1 - \frac{a}{RTV} + \frac{a^2}{2R^2T^2V^2}\right)\right]$$

soit, si on se limite au terme en $1/V^2$:

$$\boxed{p \approx \frac{RT}{V} + \frac{bRT - a}{V^2}}$$

40. Le travail reçu par le gaz au cours de la transformation isotherme $1 \rightarrow 2$ est alors :

$$W'_{12} = -\int_1^2 p\,dV = -RT_1 \int_{3V_0}^{V_0} \frac{dV}{V} - \left(bRT_1 - a\right)\int_{3V_0}^{V_0} \frac{dV}{V^2}$$

Comme $T_1 \approx \dfrac{3p_0V_0}{R}$ il vient :

$$W'_{12} = W_{12} + 2p_0\left(b - \frac{a}{3p_0V_0}\right)$$

On en déduit l'écart relatif :

$$\eta = \frac{W'_{12} - W_{12}}{W_{12}} = \frac{2}{3V_0 \ln 3}\left(b - \frac{a}{3p_0V_0}\right) = 7.10^{-4} << 1$$

On peut considérer que l'hélium se comporte comme un gaz parfait.