ICNA - SESSION 2002
ÉPREUVE OPTIONNELLE DE PHYSIQUE
CORRIGÉ

Électromécanique.

1. Le champ magnétique étant radial et d'intensité constante chaque spire s du solénoïde est soumise à la même force de Laplace. La résultante de ces forces est donc :

$$\boxed{\mathbf{F}_L = \oint_S i\,d\ell \wedge \mathbf{B} = N\oint_s i\,d\ell \wedge \mathbf{B} = -NaiB\int_0^{2\pi} d\theta\left(\mathbf{e}_\theta \wedge \mathbf{e}_r\right) = 2\pi NiaB\,\mathbf{e}_z}$$

2. Le théorème de la résultante dynamique (*ou théorème de la résultante cinétique*) appliqué à la bobine, à partir de sa position d'équilibre, dans le référentiel – supposé galiléen - lié au bâti fixe, nous donne l'équation mécanique :

$$\boxed{m\frac{d^2z(t)}{dt^2} + f\frac{dz(t)}{dt} + kz(t) = 2\pi NaBi(t)}$$

3. Lorsque la bobine se déplace dans **B**, sans se déformer, il apparaît une f.é.m. induite :

$$e'(t) = -L\frac{di(t)}{dt} + N\oint_s (\mathbf{v}\wedge\mathbf{B})d\ell = -L\frac{di(t)}{dt} - 2\pi NaB\frac{dz(t)}{dt}$$

La loi d'Ohm généralisée, e(t) + e'(t) = Ri(t), conduit alors à l'équation électrique :

$$\boxed{L\frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + 2\pi NaB\frac{dz(t)}{dt} = e(t) = E_0\cos(\omega t)}$$

4. En régime sinusoïdal forcé à la pulsation ω les équations mécanique et électrique s'écrivent :

$$\left[f + \left(jm\omega + \frac{k}{j\omega}\right)\right]\underline{v}(t) = 2\pi NaB\underline{i}(t) \quad , \quad (R + jL\omega)\underline{i}(t) + 2\pi NaB\underline{v}(t) = \underline{e}(t)$$

Par élimination de $\underline{v}(t)$ entre ces deux équations on obtient :

$$\left[(R + jL\omega) + \frac{(2\pi NaB)^2}{f + \left(jm\omega + \frac{k}{j\omega}\right)}\right]\underline{I} = E_0$$

que l'on peut mettre sous la forme :

$$\left[\left(R + \frac{(2\pi NaB\omega)^2 f}{\left(k - m\omega^2\right)^2 + f^2\omega^2}\right) + j\omega\left(L + \frac{(2\pi NaB)^2\left(k - m\omega^2\right)}{\left(k - m\omega^2\right)^2 + f^2\omega^2}\right)\right]\underline{I} = E_0$$

On en déduit par identification :

$$\boxed{\alpha(\omega) = \frac{(2\pi NaB\omega)^2 f}{\left(k - m\omega^2\right)^2 + f^2\omega^2}}$$

5. Et :

$$\boxed{\beta(\omega) = \frac{(2\pi NaB)^2\left(k - m\omega^2\right)}{\left(k - m\omega^2\right)^2 + f^2\omega^2}}$$

Notons que $\underline{Z}_m = \alpha(\omega) + j\omega\beta(\omega)$ est l'impédance ***motionnelle***.

6. $\alpha(\omega_1) = \omega_1\beta(\omega_1)$ et $\alpha(\omega_2) = -\omega_2\beta(\omega_2)$ impliquent $f = \frac{k}{\omega_1} - m\omega_1$ et $f = -\frac{k}{\omega_2} + m\omega_2$. Par addition puis soustraction membre à membre il vient :

$$2f = (\omega_2 - \omega_1)\left(m + \frac{k}{\omega_1\omega_2}\right) \quad , \quad 0 = (\omega_2 + \omega_1)\left(m - \frac{k}{\omega_1\omega_2}\right)$$

Comme $\omega_k > 0$ (k = 1,2) on en déduit successivement $\frac{k}{\omega_1\omega_2} = m$ puis :

$$\boxed{\omega_2 - \omega_1 = \frac{f}{m}}$$

C'est la largeur à mi-hauteur de la courbe $\alpha(\omega)$.

Remarque. Cet exercice décrit un modèle simplifié de haut-parleur électrodynamique.

Optique géométrique : la loupe.

7. Pour déterminer le grandissement transversal on utilise la formule de Newton :

$$\boxed{G_t = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = -\frac{\overline{F'A}}{\overline{OF'}} = -\frac{\overline{F'C} + \overline{CA'}}{\overline{OF'}} = \frac{d-a}{f'}},$$

8. Les angles étant petits on peut écrire :

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \tan\alpha \approx \alpha \quad , \quad \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A'C}} = \tan\alpha' \approx \alpha'$$

On en déduit le grossissement :

$$G = \frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}\frac{\overline{AC}}{\overline{A'C}} = G_t\frac{\overline{AC}}{\overline{A'C}}$$

Compte tenu que $\overline{AC} = \overline{AF} + \overline{FF'} + \overline{F'C} = -\frac{f'^2}{d-a} + 2f' + a$ il vient :

$$\boxed{G = \frac{(2f'+a)(d-a) - f'^2}{f'd}}$$

9. Le centre optique de l'œil est placé au foyer image de la loupe soit a = 0 ce qui nous donne :

$$G = 2 - \frac{f'}{d}$$

G sera maximal pour d infini.

10. Dans ce cas sa valeur est :

$$\boxed{G_1 = 2}$$

11. Le centre optique de l'œil est placé à 2cm du centre optique de la loupe soit $a = \overline{F'O} + \overline{OC} = -18\text{cm}$. Il en résulte que :

$$G = 1{,}1 - \frac{1}{5d} \quad \text{(d en cm)}$$

On en déduit la variation du grossissement :

$$\boxed{\Delta G = G(\infty) - G(d_m) = \frac{1}{5d_m} = 10^{-2}}$$

G ne varie quasiment pas lorsque l'observateur accommode : la loupe n'a aucun intérêt.

12. Le centre optique de l'œil est placé à 40 cm du centre optique de la loupe soit a = 20 cm. Dans ce cas on a :

$$G = 3 - \frac{80}{d}$$

La valeur maximale du grossissement vaut alors :

$$\boxed{G_2 = 3}$$

Notons que, pour pouvoir placer l'objet, il faut que $f' \leq d - a$ soit $d \geq f' + a$. Cette condition sera vérifiée pour $d \geq 40\text{cm}$. G varie alors entre 1 (*objet contre la loupe*) à 3 lorsque d varie de 40 cm à l'infini.

Mécanique des fluides.

13. Tout plan contenant l'axe Oz, donc $\boldsymbol{\omega}$, est plan d'antisymétrie pour l'écoulement car $\boldsymbol{\omega}$ est un pseudo-vecteur. Il en résulte que, $\mathbf{v}$, vecteur vrai est orthogonal à ce plan donc orthoradial.
Par ailleurs la symétrie de révolution impose $\mathbf{v} = v(r,z)\mathbf{e}_\theta$, car v_θ ne peut dépendre de θ. Cette condition est compatible avec le fait que l'écoulement est supposé incompressible.

14. On applique le théorème de Stokes à un contour circulaire de rayon r < a, d'axe Oz orienté dans le sens direct :

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{v}.d\ell = 2\iint_{\mathcal{D}} \boldsymbol{\omega}.(dS\,\mathbf{e}_z)$$

Or, pour r < a, $\boldsymbol{\omega}.\mathbf{e}_z = \omega$ est uniforme sur tout le disque $\mathcal{D}$ qui s'appuie sur le contour $\mathcal{C}$. Il en résulte que :

$$2\pi r v_\theta = 2\pi r^2 \omega$$

soit :

$$\boxed{\mathbf{v} = \omega r\, \mathbf{e}_\theta}$$

15. Pour r > a on effectue la même démonstration et prenant garde que $\boldsymbol{\omega}.\mathbf{e}_z$ n'est non nul que pour r < a. Il vient alors :

$$2\pi r v_\theta = 2\pi a^2 \omega$$

soit :

$$\boxed{\mathbf{v} = \frac{\omega a^2}{r}\mathbf{e}_\theta}$$

On observe que le champ de vitesse est continu en r = a.

16. L'équation d'Euler, en régime stationnaire, s'écrit :

$$\rho(\mathbf{v}.\nabla)\mathbf{v} = -\nabla p + \rho\mathbf{g}$$

Pour r > a elle se met sous la forme :

$$\nabla\left(\rho\frac{v^2}{2} + p + \rho g z\right) = \nabla\left(p + \rho g z + \rho\frac{a^4\omega^2}{2r^2}\right) = \mathbf{0}$$

soit :

$$p(r,z) + \rho g z + \rho\frac{a^4\omega^2}{2r^2} = K$$

La valeur de la constante K est déterminée à l'aide des conditions aux limites : $p(\infty, 0^-) = p_0$. On en déduit le champ de pression pour r > a :

$$\boxed{p(r,z) = p_0 - \rho g z - \rho\frac{a^4\omega^2}{2r^2}}$$

17. Pour r < a, l'équation d'Euler se met sous la forme :

$$\nabla\left(\rho\frac{v^2}{2} - \rho\omega^2 r^2 + p + \rho g z\right) = \nabla\left(p + \rho g z - \rho\frac{\omega^2 r^2}{2}\right) = \mathbf{0}$$

soit :

$$p(r,z) + \rho g z - \rho\frac{\omega^2 r^2}{2} = K'$$

On détermine la constante K' en écrivant la continuité du champ de pression en r = a ce qui nous conduit à :

$$\boxed{p(r,z) = p_0 - \rho g z - \rho\frac{\omega^2}{2}\left(2a^2 - r^2\right)}$$

18. En tout point de la surface libre du liquide on a $p(r,z) = p_0$. Ainsi, pour $r < a$, l'équation de la surface libre est :

$$\boxed{z(r) = \frac{\omega^2}{2g}\left(r^2 - 2a^2\right)}$$

C'est un ***paraboloïde de révolution*** d'axe Oz.

19. On procède de même pour $r > a$ ce qui nous conduit à :

$$\boxed{z(r) = -\frac{a^4\omega^2}{2gr^2}}$$

Thermodynamique.

20. A l'équilibre on a $p_{Af} = p_{Bf} = p_f$. Le gaz contenu dans le compartiment B a subi une transformation isentropique (adiabatique et réversible). Compte tenu que $V_{Bf} = 2V_i - V_{Af}$, on déduit, à l'aide de la formule de Laplace $pV^\gamma = \text{Cte}$, la pression finale :

$$\boxed{p_f = p_0\left(\frac{V_i}{2V_i - V_{Af}}\right)^\gamma = 1{,}16.10^5\,\text{Pa}}$$

21. Avec l'équation d'état des gaz parfaits on obtient la température finale du gaz dans le compartiment B :

$$\boxed{T_{Bf} = T_i\frac{p_f V_{Bf}}{p_0 V_i} = T_i\left(\frac{V_i}{2V_i - V_{Af}}\right)^{\gamma-1} = 313\text{K}}$$

22. On fait de même pour le gaz contenu dans le compartiment A, soit :

$$\boxed{T_{Af} = T_i\frac{p_f V_{Af}}{p_0 V_i} = 383\text{K}}$$

23. Le bilan énergétique du système se traduit par :

$$\Delta U_A + \Delta U_B + \Delta U_R = W$$

avec $W = R_0 I^2\tau$ travail fourni par le générateur, $\Delta U_R = 0$ car la capacité thermique de la résistance est négligeable, $\Delta(U_A + U_B) = nC_v(T_{Af} + T_{Bf} - 2T_i) = \frac{p_0 V_i}{(\gamma-1)T_i}(T_{Af} + T_{Bf} - 2T_i)$ car un gaz parfait suit la première loi de Joule.

On en déduit :

$$\boxed{\tau = \frac{p_0 V_i}{(\gamma-1)R_0 I^2 T_i}(T_{Af} + T_{Bf} - 2T_i) = 8\text{s}}$$

24. Les parois étant adiabatiques le travail reçu par le gaz contenu dans le compartiment B est :

$$\boxed{W_B = \Delta U_B = nC_v(T_{Bf} - T_i) = \frac{p_0 V_i}{\gamma-1}\left(\frac{T_{Bf}}{T_i} - 1\right) = 11\text{J}}$$

25. La variation d'entropie du gaz contenu dans le compartiment A est :

$$\boxed{\Delta S_A = nC_v\ln\left(\frac{p_f}{p_0}\left(\frac{V_{Af}}{V_i}\right)^\gamma\right) = \frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p_0 V_i}{T_i}\ln\left(\frac{V_{Af}}{2V_i - V_{Af}}\right) = 0{,}23\text{J.K}^{-1}}$$

C'est d'ailleurs la variation d'entropie du système global. Effectivement $\Delta S_R = 0$ car l'état thermodynamique de la résistance est supposé invariable et $\Delta S_B = 0$ car le gaz du compartiment B subit une transformation isentropique. L'évolution du système, bien que très lente, est irréversible.

Mécanique du point.

26. Les conditions initiales sont telles que :

$$x(0) = A\cos\varphi + B = \ell \quad , \quad \dot{x}(0) = -A\omega\sin\varphi = v_0 \quad , \quad \ddot{x}(0) = -A\omega^2\cos\varphi = -g$$

Il en résulte que :

$$\boxed{\tan\varphi = -\frac{v_0\omega}{g} \quad , \quad A = \sqrt{\frac{g^2}{\omega^4}+\frac{v_0^2}{\omega^2}}}$$

27. Par ailleurs, comme $A\cos\varphi = \frac{g}{\omega^2}$, on obtient :

$$\boxed{B = \ell - \frac{g}{\omega^2}}$$

28. Il n'y a aucun effet dissipatif donc l'énergie mécanique de la masse m se conserve au cours du temps. Ainsi, quand elle repasse par l'ordonnée $x = \ell$, elle présente une vitesse :

$$\boxed{\mathbf{v}_1 = -\mathbf{v}_0}$$

29. Lorsque la masse m passe par l'ordonnée $x = \ell$, dans le sens descendant, le fil n'est plus tendu et la seule force qui intervient est le poids de cette masse. Entre $x = \ell$ et $x = 0$, le théorème de l'énergie cinétique nous donne :

$$\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = mg\ell$$

Il en résulte que la masse m présente, lorsqu'elle arrive sur le support en x = 0, une vitesse :

$$\boxed{\mathbf{v}_2 = -\sqrt{\frac{2g\ell}{v_0^2}+1}\,\mathbf{v}_0}$$

30. La masse M peut juste décoller du support si, lorsque la vitesse de m s'annule à l'ordonnée x_1, la tension du fil présente une intensité telle que :

$$k(x_1-\ell) = Mg \Rightarrow x_1 - \ell = \frac{g}{\Omega^2}$$

La conservation de l'énergie mécanique de la masse m nous permet de déterminer sa vitesse initiale limite $\mathbf{v}_\ell$ pour qu'il en soit ainsi. On a :

$$\frac{1}{2}k(x_1-\ell)^2 + mgx_1 = \frac{1}{2}mv_\ell^2 + mg\ell$$

d'où on déduit :

$$\boxed{\mathbf{v}_\ell = \frac{g}{\Omega^2}\sqrt{\omega^2+2\Omega^2}\,\mathbf{e}_x}$$

31. Si $v_0 \geq v_\ell$ la masse M décolle à l'instant t_1 tel que $k(x(t_1)-\ell) = Mg$, soit :

$$x(t_1) = A\cos(\omega t_1+\varphi) + \ell - \frac{g}{\omega^2} = \frac{g}{\Omega^2} + \ell$$

d'où :

$$\boxed{\cos(\omega t_1+\varphi) = \frac{g}{A}\left(\frac{1}{\omega^2}+\frac{1}{\Omega^2}\right)}$$

32. A partir de l'instant où la masse M a décollé le théorème de la résultante dynamique appliqué respectivement à m et M nous donne en projection suivant $\mathbf{e_x}$:

$$m\ddot{x} = -mg - k(x-X-\ell) \quad , \quad M\ddot{X} = -Mg + k(x-X-\ell)$$

soit :

$$\boxed{\ddot{x} = -g - \omega^2(x-X-\ell) \quad , \quad \ddot{X} = -g + \Omega^2(x-X-\ell)}$$

Onde électromagnétique dans un conducteur.

33. Les équations de Maxwell dans le conducteur s'écrivent :

$$\nabla.\mathbf{B} = 0 \quad \text{(équation de Maxwell-Thomson)} \qquad \nabla \wedge \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad \text{(équation de Maxwell-Faraday)}$$

$$\nabla.\mathbf{E} = 0 \quad \text{(équation de Maxwell-Gauss)} \qquad \nabla \wedge \mathbf{B} = \mu_0 \gamma \mathbf{E} \quad \text{(équation de Maxwell-Ampère)}$$

car le milieu n'est pas chargé ($\rho = 0$) et on peut négliger le courant de déplacement $\mathbf{j}_D = \varepsilon_0 \dfrac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ devant le courant de conduction $\mathbf{j} = \gamma \mathbf{E}$ puisque $\gamma >> \varepsilon_0 \omega$.
Le calcul de $\nabla \wedge (\nabla \wedge \mathbf{B})$ nous conduit alors à l'équation différentielle :

$$\boxed{\Delta \underline{\mathbf{B}}_0(z) = i\mu_0 \gamma \omega \underline{\mathbf{B}}_0(z)}$$

34. Cette équation différentielle admet une solution générale de la forme :

$$\underline{\mathbf{B}}_0(z) = \underline{\mathbf{C}}_1 \exp\left[-(1+i)\sqrt{\frac{\mu_0\gamma\omega}{2}} z\right] + \underline{\mathbf{C}}_2 \exp\left[(1+i)\sqrt{\frac{\mu_0\gamma\omega}{2}} z\right]$$

Or ce champ magnétique doit rester fini quand $z \to +\infty$ (aucune source à l'infini) ce qui implique $\underline{\mathbf{C}}_2 = \mathbf{0}$, d'où :

$$\underline{\mathbf{B}}(z,t) = \underline{\mathbf{C}}_1 \exp\left(-\frac{z}{\delta}\right) \exp\left(i(\omega t - kz)\right)$$

si on pose :

$$\boxed{\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma \omega}}}$$

δ est la profondeur de pénétration, c'est-à-dire la distance au bout de laquelle l'amplitude de l'onde est divisée par e.

35. Et :

$$\boxed{k = \frac{1}{\delta} = \sqrt{\frac{\mu_0\gamma\omega}{2}}}$$

36. Numériquement on obtient : $\delta = 0{,}64.10^{-6}\,\text{m}$.

37. On suppose que : $\underline{\mathbf{B}}(z,t) = B_0 \exp\left(-\frac{z}{\delta}\right) \exp\left(i(\omega t - kz)\right) \mathbf{e}_y$. Le champ électrique associé à cette onde est donc, d'après l'équation de Maxwell-Ampère, tel que :

$$\underline{\mathbf{E}}(z,t) = \frac{1}{\mu_0 \gamma} \left(\nabla \wedge \underline{\mathbf{B}}(z,t)\right)$$

soit :

$$\underline{\mathbf{E}}(z,t) = B_0 \sqrt{\frac{\omega}{\mu_0\gamma}} \exp\left(i\frac{\pi}{4}\right) \exp\left(-\frac{z}{\delta}\right) \exp\left(i(\omega t - kz)\right) \mathbf{e}_x$$

Par identification avec l'expression proposée, on obtient :

$$\boxed{E_0 = B_0 \sqrt{\frac{\omega}{\mu_0\gamma}}}$$

38. Et :

$$\boxed{\varphi = \frac{\pi}{4}}$$

39. La valeur moyenne temporelle sur une période du flux du vecteur de Poynting à travers une surface Σ appartenant au plan $z = 0$ est :

$$\langle \phi \rangle = \iint_{\Sigma} \langle \mathbf{R} \rangle_{z=0} . (dx\, dy\, \mathbf{e}_z)$$

Compte tenu que $\langle \mathbf{R} \rangle_{z=0} = \frac{1}{2}\Re\mathrm{e}\left\{\frac{\underline{\mathbf{E}} \wedge \underline{\mathbf{B}}^*}{\mu_0}\right\}_{z=0} = B_0^2\sqrt{\frac{\omega}{8\mu_0^3\gamma}}$, il vient :

$$\boxed{\langle \phi \rangle = B_0^2 \Sigma \sqrt{\frac{\omega}{8\mu_0^3\gamma}}}$$

40. La puissance moyenne dissipée par effet Joule sur une période dans le volume du conducteur défini par le cylindre de section droite Σ et de longueur infinie est :

$$\langle \mathcal{P} \rangle = \iiint_{\mathcal{V}} \langle \mathbf{j}.\mathbf{E} \rangle \,\mathrm{dV} = \frac{\gamma}{2}\iiint_{\mathcal{V}} \Re\mathrm{e}\{\underline{\mathbf{E}}.\underline{\mathbf{E}}^*\}\,\mathrm{d}\Sigma\,\mathrm{dz} = B_0^2 \Sigma \frac{\omega}{2\mu_0\gamma}\int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{2z}{\delta}\right)\mathrm{dz}$$

soit :

$$\boxed{\langle \mathcal{P} \rangle = B_0^2 \Sigma \sqrt{\frac{\omega}{8\mu_0^3\gamma}}}$$

On remarque, évidemment, que $\langle \mathcal{P} \rangle = \langle \phi \rangle$.