

ICNA - SESSION 2003

ÉPREUVE COMMUNE DE PHYSIQUE

CORRIGÉ

Pendule électrostatique.

1. Après contact chaque boule porte la même charge électrique $q = Q/2$ car les deux boules métalliques sont identiques. Elles se repoussent, A exerçant sur P une force électrostatique donnée par la loi de Coulomb :

$$\mathbf{f} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{AP}}{\|\mathbf{AP}\|^3}$$

Comme $\|\mathbf{AP}\| = 2b \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)$ il vient :

$$f = \|\mathbf{f}\| = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{16b^2 \sin^2(\varphi/2)}$$

2. A l'équilibre le moment en O des forces appliquées à P est nul, soit :

$$\mathbf{M}_{\text{ext}}(\text{O}) = \mathbf{OP} \wedge (\mathbf{f} + m\mathbf{g}) = (b\mathbf{e}_r) \wedge \left(f \frac{\mathbf{AP}}{\|\mathbf{AP}\|} + m\mathbf{g}\mathbf{e}_x \right) = \sin\varphi_e \left(\frac{f}{2\sin(\varphi_e/2)} - mg \right) \mathbf{e}_z = \mathbf{0}$$

Si on suppose $0 < \varphi_e < \pi$ on en déduit, avec le résultat de la question précédente :

$$\sin^3\left(\frac{\varphi_e}{2}\right) = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{32b^2 mg}$$

Cette position d'équilibre n'existe que si $\frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{32b^2 mg} < 1$.

3. L'équilibre de P vérifie aussi $\mathbf{T} + m\mathbf{g} + \mathbf{f} = \mathbf{0}$. En projection selon \mathbf{e}_r , compte tenu du résultat de la question 2 et de $\cos\varphi_e = 1 - 2\sin^2(\varphi_e/2)$, on obtient :

$$T = mg \cos\varphi_e + \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{16b^2 \sin(\varphi_e/2)} = mg$$

4. La charge électrique portée par la boule P est :

$$q = \frac{Q}{2} = \sqrt{32\pi\epsilon_0 b^2 mg \sin^3(\varphi_e/2)} = 2 \cdot 10^{-7} \text{ C}$$

5. Les seules forces qui dérivent d'une énergie potentielle sont le poids et la force électrique. L'énergie potentielle de pesanteur, à une constante additive près, est :

$$E_{p1}(\text{P}) = -m\mathbf{g} \cdot \mathbf{OP} = -mgb \cos\varphi$$

L'énergie potentielle électrostatique, à une constante additive près, est :

$$E_{p2}(\text{P}) = qV(\text{P}) = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{8b \sin(\varphi/2)}$$

L'énergie potentielle totale du système est donc :

$$E_p(\text{P}) = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{8b \sin(\varphi/2)} - mgb \cos\varphi$$

6. Les positions d'équilibre du système correspondent aux valeurs φ_e de φ solutions de :

$$\frac{dE_p}{d\varphi} = b \sin \varphi_e \left[mg - \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{32b^2 \sin^3(\varphi_e/2)} \right] = 0$$

On retrouve ainsi le résultat de la question 2.

La nature de l'équilibre dépend du signe de $\left(\frac{d^2 E_p}{d\varphi^2} \right)_{\varphi_e}$. On a :

$$\left(\frac{d^2 E_p}{d\varphi^2} \right)_{\varphi_e} = 6b \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\cos^2(\varphi_e/2)}{32b^2 \sin^3(\varphi_e/2)} = 6mgb \cos^2\left(\frac{\varphi_e}{2}\right) > 0$$

L'équilibre est donc stable.

Mécanique du solide.

7. On a :

$$x_G = \mathbf{OG} \cdot \mathbf{e}_x = (\mathbf{OA} + \mathbf{AG}) \cdot \mathbf{e}_x = b \sin \varphi + \frac{b\sqrt{2}}{2} \cos\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{b}{2} (\cos \varphi + \sin \varphi)$$

$$y_G = \mathbf{OG} \cdot \mathbf{e}_y = (\mathbf{OB} + \mathbf{BG}) \cdot \mathbf{e}_y = b \cos \varphi + \frac{b\sqrt{2}}{2} \sin\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{b}{2} (\cos \varphi + \sin \varphi)$$

On observe que $x_G = y_G$ donc la trajectoire de G est portée par la première bissectrice du plan xOy.

8. On applique le théorème de la résultante dynamique (ou résultante cinétique) à la plaque dans \mathcal{R} , soit $\mathbf{Ma}(G/\mathcal{R}) = \mathbf{R}_A + \mathbf{R}_B + \mathbf{Mg}$, avec $\mathbf{R}_A = R_A \mathbf{e}_y$ et $\mathbf{R}_B = R_B \mathbf{e}_x$ car les contacts sont sans frottement.

On en déduit par projection respectivement suivant \mathbf{e}_x et \mathbf{e}_y :

$$M\ddot{x}_G = R_B, \quad M\ddot{y}_G = R_A - Mg$$

Comme $\ddot{x}_G = \ddot{y}_G$ il vient :

$$\boxed{R_A - R_B = Mg}$$

9. Le moment en G des forces extérieures qui s'exercent sur la plaque est :

$$\mathbf{M}_{\text{ext}}(G) = \mathbf{GA} \wedge \mathbf{R}_A + \mathbf{GB} \wedge \mathbf{R}_B$$

Compte tenu que :

$$\mathbf{GA} = -\frac{b\sqrt{2}}{2} \left[\cos\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right) \mathbf{e}_x + \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right) \mathbf{e}_y \right], \quad \mathbf{GB} = -\frac{b\sqrt{2}}{2} \left[\cos\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right) \mathbf{e}_x + \sin\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right) \mathbf{e}_y \right]$$

on obtient :

$$\boxed{\mathbf{M}_{\text{ext}}(G) = -\frac{b}{2} (\cos \varphi - \sin \varphi) (R_A + R_B) \mathbf{e}_z}$$

10. Le théorème du moment cinétique appliqué à la plaque en G dans \mathcal{R} nous conduit à :

$$\frac{Mb^2}{6} \ddot{\varphi} = -\frac{b}{2} (\cos \varphi - \sin \varphi) (R_A + R_B)$$

d'où on tire :

$$\boxed{R_A + R_B = -\frac{Mb}{3} \frac{\ddot{\varphi}}{\cos \varphi - \sin \varphi}}$$

11. En additionnant membre à membre les deux équations scalaires obtenues à la question 8 il vient :

$$M(\ddot{x}_G + \ddot{y}_G) = 2M\ddot{x}_G = R_A + R_B - Mg$$

En utilisant le résultat de la question 11 et compte tenu que :

$$\ddot{x}_G = \frac{b}{2} \left[(\cos \varphi - \sin \varphi) \ddot{\varphi} - (\cos \varphi + \sin \varphi) \dot{\varphi}^2 \right]$$

on en déduit l'équation du mouvement en $\varphi(t)$:

$$\boxed{\ddot{\varphi} \left(2 \cos \varphi \sin \varphi - \frac{4}{3} \right) = \frac{g}{b} (\cos \varphi - \sin \varphi) - \dot{\varphi}^2 (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi)}$$

Champ magnétique associé à une distribution de courants.

12. Toute translation parallèlement au plan xOz laisse la distribution de courants invariante donc $\mathbf{B}(M) = \mathbf{B}(y)$.

Tout plan $x = \text{Cte}$ est plan de symétrie de la distribution de courants donc \mathbf{B} , pseudo vecteur, est tel que $\mathbf{B}(M) = B(y)\mathbf{e}_x$.

Le plan $y = 0$ étant aussi plan de symétrie il en résulte que $B(-y) = -B(y)$.

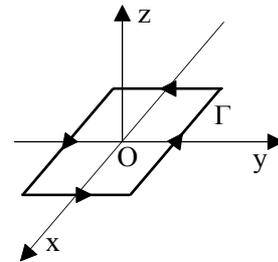
13. On applique le théorème d'Ampère sur le contour rectangulaire Γ , de longueur ℓ , de largeur unité, schématisé ci-contre. Il vient :

$$-\ell B(y) + \ell B(-y) = \mu_0 \ell j_s$$

En définitive :

$$\mathbf{B} = -\frac{\mu_0}{2} j_s \operatorname{sgn}(y) \mathbf{e}_x$$

où $\operatorname{sgn}(y) = +1$ pour $y > 0$ et $\operatorname{sgn}(y) = -1$ pour $y < 0$.



14. On assimile la plaque de largeur dY , centrée en Y , à une nappe de courants de densité surfacique $j_s = j(Y)dY$. Cette plaque élémentaire crée, en un point M de l'espace, un champ magnétique :

$$d\mathbf{B}_1(M) = -\frac{\mu_0}{2} j(Y) dY \operatorname{sgn}(y-Y) \mathbf{e}_x$$

15. On considère que $j(y) = j_0 \frac{a^2}{(y+a)^2}$ et on cherche le champ magnétique créé dans le demi-espace $y > 0$. Dans ce cas :

$$\mathbf{B}_1(y > 0) = -\frac{\mu_0}{2} j_0 a^2 \left[\int_0^y \frac{dY}{(Y+a)^2} - \int_y^{+\infty} \frac{dY}{(Y+a)^2} \right] \mathbf{e}_x$$

soit :

$$\mathbf{B}_1(y > 0) = \frac{\mu_0}{2} j_0 a \left[\frac{2a}{y+a} - 1 \right] \mathbf{e}_x$$

16. Dans le demi-espace $y < 0$ on obtient :

$$\mathbf{B}_1(y < 0) = \frac{\mu_0}{2} j_0 a^2 \left[\int_0^{+\infty} \frac{dY}{(Y+a)^2} \right] \mathbf{e}_x = \frac{\mu_0}{2} j_0 a \mathbf{e}_x$$

Notons que les relations obtenues assurent la continuité de \mathbf{B} dans le plan $y = 0$ (*absence de courants superficiels*). Par ailleurs $\lim_{y \rightarrow +\infty} \mathbf{B}(y > 0) = -\frac{\mu_0}{2} j_0 a \mathbf{e}_x = -\mathbf{B}(0^-)$ car dans cette situation toutes les plaques sont situées du même côté.

Électrocinétique : régime transitoire.

17. La partie inférieure du circuit est galvaniquement isolée donc sa charge électrique se conserve au cours du temps :

$$Q_1(t) + Q_2(t) = Q_0$$

Il en résulte que :

$$\frac{dQ_2(t)}{dt} = -\frac{dQ_1(t)}{dt} = i(t)$$

La loi des mailles appliquée au circuit nous donne :

$$\frac{Q_2(t)}{C_2} + Ri(t) - \frac{Q_1(t)}{C_1} = 0$$

En dérivant par rapport au temps et en posant $\tau = \frac{RC_1C_2}{C_1 + C_2}$ on obtient l'équation différentielle en $i(t)$:

$$\frac{di(t)}{dt} + \frac{i(t)}{\tau} = 0$$

Compte tenu qu'à $t = 0^+$ on a $i(0^+) = \frac{Q_0}{RC_1}$, cette équation différentielle admet pour solution :

$$i(t) = \frac{Q_0}{RC_1} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

18. Des relations :

$$Q_1(t) + Q_2(t) = Q_0 \quad , \quad \frac{Q_1(t)}{C_1} - \frac{Q_2(t)}{C_2} = \frac{Q_0}{C_1} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

on déduit aisément les charges des deux condensateurs à l'instant $t > 0$:

$$Q_1(t) = \frac{Q_0}{C_1 + C_2} \left[C_1 + C_2 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right] \quad , \quad Q_2(t) = \frac{C_2 Q_0}{C_1 + C_2} \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right]$$

19. Il n'y a aucun générateur dans le circuit donc il est isolé électriquement. Cette affirmation se vérifie aisément car les charges finales des deux condensateurs :

$$Q_{1f} = \lim_{t \rightarrow +\infty} Q_1(t) = \frac{C_1 Q_0}{C_1 + C_2} \quad , \quad Q_{2f} = \lim_{t \rightarrow +\infty} Q_2(t) = \frac{C_2 Q_0}{C_1 + C_2}$$

sont telles que :

$$Q_{01} + Q_{02} = Q_1(t) + Q_2(t) = Q_{1f} + Q_{2f} = Q_0$$

Dans l'état final, où $i(t) = 0$, on a deux condensateurs, de capacités C_1 et C_2 portant les charges Q_{1f} et Q_{2f} , montés en parallèle. Cet ensemble est équivalent à un condensateur unique, de capacité $C_1 + C_2$, portant la charge Q_0 .

20. La variation de l'énergie emmagasinée dans les deux condensateurs au cours du régime transitoire est :

$$\Delta E = E_f - E_i = \left(\frac{Q_{1f}^2}{2C_1} + \frac{Q_{2f}^2}{2C_2} \right) - \frac{Q_0^2}{2C_1} = \frac{Q_0^2}{2(C_1 + C_2)} - \frac{Q_0^2}{2C_1} = -\frac{C_2 Q_0^2}{2C_1(C_1 + C_2)}$$

21. L'énergie consommée par effet Joule pendant la durée t du régime transitoire est :

$$W(t) = \int_0^t Ri^2(t') dt' = \frac{C_2 Q_0^2}{2C_1(C_1 + C_2)} \left[1 - \exp\left(-\frac{2t}{\tau}\right) \right]$$

22. L'énergie totale consommée par effet Joule est alors $W_f = \lim_{t \rightarrow +\infty} W(t) = \frac{C_2 Q_0^2}{2C_1(C_1 + C_2)}$. On observe évidemment que :

$$E_i - E_f - W_f = 0$$

Induction électromagnétique.

23. Le solénoïde, supposé infini, crée un champ magnétique \mathbf{B}_s tel que :

$$\mathbf{B}_s = \begin{cases} \mu_0 n i(t) \mathbf{e}_z & \text{à l'intérieur} \\ \mathbf{0} & \text{à l'extérieur} \end{cases}$$

Il produit, à travers la bobine plate coaxiale, un flux magnétique $\Phi_e(t) = \mu_0 n N S i(t)$ qui s'ajoute à son flux propre $\Phi_p(t) = L i(t)$. Cette bobine, indéformable, immobile et de résistance R , est ainsi le siège d'une f.é.m. induite $e(t)$ donnée par la loi de Faraday :

$$e(t) = -\frac{d(\Phi_e + \Phi_p)}{dt} = -\mu_0 n N S \frac{di(t)}{dt} - L \frac{di(t)}{dt}$$

La loi d'Ohm nous conduit alors à l'équation différentielle :

$$\tau' \frac{di'(t)}{dt} + i'(t) = -\tau \frac{di(t)}{dt}$$

si on pose $\tau = \frac{\mu_0 n N S}{R}$ et $\tau' = \frac{L}{R}$, grandeurs homogènes à des temps.

24. En régime établi $i'(t)$ varie sinusoidalement au cours du temps à la pulsation ω . L'équation différentielle précédente étant linéaire et à coefficients constants on peut utiliser le formalisme complexe. Il en résulte que :

$$\underline{i}'(t) = \frac{-\omega \tau i_0}{1 + j\omega \tau'} \exp(j\omega t)$$

d'où on déduit :

$$i'(t) = \Re\{\underline{i}'(t)\} = \frac{-\omega \tau i_0}{1 + \omega^2 \tau'^2} [\cos(\omega t) + \omega \tau' \sin(\omega t)]$$

25. Si $\omega \tau' \gg 1$ on obtient :

$$i'(t) \approx \frac{-\tau}{\tau'} i_0 \sin(\omega t) = \frac{-\tau}{\tau'} i(t)$$

$i'(t)$ est proportionnel à $i(t)$ et les deux courants évoluent en opposition de phase.

26. La puissance moyenne consommée par la bobine est due à sa résistance soit :

$$\mathcal{P} = \frac{1}{T} \int_0^T R i'^2(t) dt = \frac{\tau^2}{2\tau'^2} R i_0^2$$

Onde électromagnétique progressive plane harmonique.

27. Cette OPPM présente un vecteur d'onde $\mathbf{k} = \frac{2\pi f}{c} \mathbf{e}_u = \frac{2\pi f}{c} (\cos \theta \mathbf{e}_y + \sin \theta \mathbf{e}_z)$. Si on suppose que la phase de l'onde est nulle au point $O(0,0,0)$ à l'instant $t = 0$; son expression au point $M(x,y,z)$ à l'instant de date t est alors :

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t = \frac{2\pi f}{c} (y \cos \theta + z \sin \theta) - 2\pi f t = 10(y \cos \theta + z \sin \theta) - 3 \cdot 10^9 t$$

28. Les plans d'onde sont les plans équiphasés c'est-à-dire les plans d'équation cartésienne :

$$y \cos \theta + z \sin \theta = Cte$$

Pour aller du plan d'onde contenant O à celui qui contient M l'onde met un temps t tel que :

$$t = \frac{y \cos \theta + z \sin \theta}{c}$$

29. On suppose que $(\mathbf{Oy}, \mathbf{Ou}) = \theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$. On a alors $\frac{dt}{d\theta} = \frac{z \cos \theta - y \sin \theta}{c} = 0$ pour $\theta = \theta_0$ tel que :

$$\tan \theta_0 = z/y$$

θ_0 correspond à la direction de OM .

On montre aisément que cette valeur correspond à un minimum de t tel que :

$$t_M = \frac{\sqrt{y^2 + z^2}}{c} = 2 \mu s$$

30. Le champ électrique \mathbf{E} associé à l'onde au point M (x,y,z) à l'instant de date t est :

$$\mathbf{E} = 4 \sin \Phi(\mathbf{r}, t) \mathbf{e}_x - 4 \sin \theta \cos \Phi(\mathbf{r}, t) \mathbf{e}_y + 4 \cos \theta \cos \Phi(\mathbf{r}, t) \mathbf{e}_z$$

Sa norme est donc :

$$\|\mathbf{E}\| = \sqrt{E_x^2 + E_y^2 + E_z^2} = 4 \text{V.m}^{-1}$$

31. Dans le plan d'onde passant par l'origine O on a :

$$\mathbf{E}(\mathbf{0}, t) = -4 \sin(\omega t) \mathbf{e}_x - 4 \sin \theta \cos(\omega t) \mathbf{e}_y + 4 \cos \theta \cos(\omega t) \mathbf{e}_z = -4 \sin(\omega t) \mathbf{e}_x + 4 \cos(\omega t) \mathbf{e}_v$$

où \mathbf{e}_v est un vecteur unitaire du plan d'onde tel que $\mathbf{e}_x \wedge \mathbf{e}_u = \mathbf{e}_v$.

L'onde est **polarisée circulairement à droite**.

32. Le champ magnétique \mathbf{B} de cette onde plane au point M et à l'instant de date t est donné par :

$$\mathbf{B} = \frac{1}{c} (\mathbf{e}_u \wedge \mathbf{E})$$

Il en résulte que :

$$\mathbf{B} = \frac{4 \cdot 10^{-8}}{3} [\cos \Phi(\mathbf{r}, t) \mathbf{e}_x + \sin \theta \sin \Phi(\mathbf{r}, t) \mathbf{e}_y - \cos \theta \sin \Phi(\mathbf{r}, t) \mathbf{e}_z]$$

33. La densité volumique d'énergie électromagnétique est :

$$w = \frac{1}{2} \epsilon_0 \mathbf{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \mathbf{B}^2 = \epsilon_0 \mathbf{E}^2 = 1,4 \cdot 10^{-10} \text{J.m}^{-3}$$

Thermodynamique.

34. On a $V = V_{iA} + V_{iB}$ et $V_{iB} = 4V_{iA}$, ce qui nous donne $V_{iA} = V/5$. A partir de l'équation d'état des gaz parfaits on déduit le nombre n de moles de gaz dans chaque compartiment, soit :

$$n = \frac{p_0 V_{iA}}{RT_0} = \frac{p_0 V}{5RT_0} = 1$$

Les deux compartiments contiennent le même nombre de moles de gaz et sont à la même température. Il en résulte que la pression dans le compartiment B est telle que $p'_0 V_{iB} = p_0 V_{iA}$, soit :

$$p'_0 = \frac{p_0}{4} = 6 \cdot 10^5 \text{Pa}$$

35. On débloque le piston ce qui ne met en jeu pratiquement aucun travail. Par ailleurs le système est isolé (*parois adiabatiques et rigides*). Le premier principe de la thermodynamique nous conduit à :

$$\Delta U = \Delta U_A + \Delta U_B = 0$$

36. La relation précédente et la première loi de Joule nous donnent :

$$nC_V(T_1 - T_0) + nC_V(T'_1 - T_0) = 0 \Rightarrow T_1 + T'_1 = 2T_0$$

D'autre part on a : $T'_1 - T_1 = \Delta T$.

A l'aide de ces deux relations on obtient :

$$T_1 = T_0 - \frac{\Delta T}{2} = 223,65 \text{K} \quad , \quad T'_1 = T_0 + \frac{\Delta T}{2} = 353,65 \text{K}$$

37. Dans l'état final les deux gaz sont à la même pression p_1 telle que :

$$p_1 V_{fA} = nRT_1 \quad , \quad p_1 V_{fB} = nRT'_1$$

En sommant membre à membre ces deux relations on obtient :

$$p_1 = \frac{2nRT_0}{V} = 9,6 \cdot 10^5 \text{Pa}$$

Le volume final du gaz dans le compartiment A est alors :

$$V_{fA} = \frac{nRT_1}{p_1} = 1,94 \cdot 10^{-3} \text{m}^3$$

38. La variation d'entropie du gaz dans le compartiment A au cours de l'évolution étudiée est :

$$\Delta S_A = nR \left[\frac{\gamma}{\gamma-1} \ln \left(\frac{T_1}{T_0} \right) + \ln \left(\frac{p_0}{p_1} \right) \right] = 2,31 \text{ J.K}^{-1}$$

39. Pour le gaz dans le compartiment B on obtient :

$$\Delta S_B = nR \left[\frac{\gamma}{\gamma-1} \ln \left(\frac{T'_1}{T_0} \right) + \ln \left(\frac{p'_0}{p_1} \right) \right] = 0,31 \text{ J.K}^{-1}$$

40. L'entropie de la totalité du gaz augmente au cours de cette transformation qui est évidemment irréversible.