ICNA - SESSION 2003
ÉPREUVE OPTIONNELLE DE PHYSIQUE
CORRIGÉ

Optique géométrique : élargisseur de faisceau.

1. Le système optique donne, d'un faisceau incident cylindrique parallèle à l'axe optique, un faisceau émergent cylindrique de même axe : le système est donc ***afocal***.

2. Pour que ce système soit afocal il faut que le foyer principal objet de $\mathcal{L}_3$ soit le conjugué image, dans $\mathcal{L}_2$, du foyer principal image de $\mathcal{L}_1$.

3. La formule de conjugaison de Descartes nous conduit à écrire :

$$-\frac{1}{\overline{O_2F_{i1}}}+\frac{1}{\overline{O_2F_{o3}}}=\frac{1}{f_2}$$

Compte tenu que $\overline{O_2F_{i1}}=\overline{O_2O_1}+\overline{O_1F_{i1}}=f_1-\Delta$ et $\overline{O_2F_{o3}}=\overline{O_2O_3}+\overline{O_3F_{o3}}=\delta-f_3$ il vient :

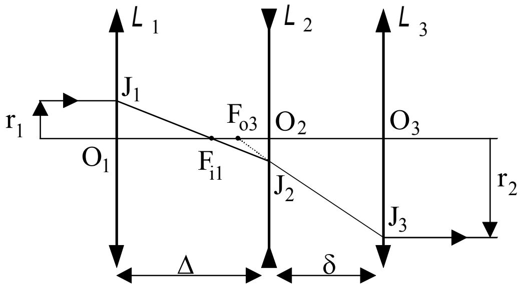
$$-\frac{1}{f_1-\Delta}+\frac{1}{\delta-f_3}=\frac{1}{f_2}$$

4. Les triangles $O_1F_{i1}J_1$ et $O_2F_{i1}J_2$ d'une part, $O_2F_{o3}J_2$ et $O_3F_{o3}J_3$ d'autre part, sont homothétiques. Il en résulte que :

$$\frac{\overline{O_1J_1}}{\overline{O_1F_{i1}}}=\frac{r_1}{\overline{O_1F_{i1}}}=\frac{\overline{O_2J_2}}{\overline{O_2F_{i1}}} \text{ et } \frac{\overline{O_3J_3}}{\overline{O_3F_{o3}}}=-\frac{r_3}{\overline{O_3F_{o3}}}=\frac{\overline{O_2J_2}}{\overline{O_2F_{o3}}}$$

On en déduit :

$$\frac{r_3}{r_1}=-\frac{\overline{O_3F_{o3}}}{\overline{O_2F_{o3}}}\cdot\frac{\overline{O_2F_{i1}}}{\overline{O_1F_{i1}}}=\frac{f_3(f_1-\Delta)}{f_1(\delta-f_3)}$$



5. Des relations obtenues aux questions **3** et **4** on déduit aisément par élimination de $(\delta - f_3)$:

$$\Delta = f_1 + f_2\left(1-\frac{f_1r_3}{f_3r_1}\right)$$

6. De la même manière, par élimination de $(f_1 - \Delta)$, on obtient :

$$\delta = f_3 + f_2\left(1-\frac{f_3r_1}{f_1r_3}\right)$$

7. L'encombrement du système est tel que :

$$d=\overline{O_1O_3}=\Delta+\delta=f_1+f_3-|f_2|\left(2-\frac{f_1r_3}{f_3r_1}-\frac{f_3r_1}{f_1r_3}\right)=23\text{cm}$$

Réflexion d'une onde électromagnétique sur un conducteur.

8. L'onde incidente est plane donc son champ magnétique est tel que :

$$\mathbf{B}_i(\mathbf{r},t)=\frac{\mathbf{k}_i\wedge\mathbf{E}_i(\mathbf{r},t)}{\omega}=\frac{E_0}{c}\cos(\mathbf{k}_i.\mathbf{r}-\omega t)\mathbf{e}_{yi}$$

9. Dans un ***conducteur parfait*** (*conductivité infinie*), champ électrique et champ magnétique sont ***nuls*** en tout point.
En tout point du plan $z = 0$ il y a :
♦ continuité de la composante tangentielle du champ électrique :

$$\boxed{\mathbf{E}_{it}(\mathbf{r}',t)+\mathbf{E}_{rt}(\mathbf{r}',t)=\mathbf{0}}$$

♦ discontinuité de la composante normale du champ électrique s'il existe, sur ce plan, une densité superficielle de charge non nulle, soit :

$$\boxed{\mathbf{N}.\left(\mathbf{E}_i(\mathbf{r}',t)+\mathbf{E}_r(\mathbf{r}',t)\right)=-\frac{\sigma(\mathbf{r}',t)}{\varepsilon_0}}$$

Attention, le signe "–" est dû au fait que la normale **N** est dirigée vers l'intérieur du conducteur.

10. La présence du conducteur, immobile, ne modifie pas la dépendance temporelle du champ électrique.
L'onde se réfléchie suivant les lois de Snell-Descartes donc $\mathbf{k}_r$ est symétrique de $\mathbf{k}_i$ par rapport au plan z = 0 ainsi $\mathbf{k}_r = k_r\mathbf{e}_{zr}$.
Dans le vide l'équation de Maxwell-Gauss, $\nabla.\mathbf{E}_r = 0$, nous conduit à $\mathbf{k}_r.\mathbf{E}_r = 0$ donc le champ électrique réfléchi est également transverse.
La continuité de la composante tangentielle - donc ici totale - du champ électrique dans le plan z = 0, compte tenu que $\mathbf{k}_r.\mathbf{r}' = \mathbf{k}_i.\mathbf{r}'$, nous donne $\mathbf{E}_{0r} = -E_0\mathbf{e}_{xi} = -E_0\mathbf{e}_{xr}$.
En définitive le champ électrique associé à l'onde réfléchie est :

$$\boxed{\mathbf{E}_r(\mathbf{r},t)=-E_0\cos(\mathbf{k}_r.\mathbf{r}-\omega t)\mathbf{e}_{xr}}$$

11. En tout point du plan z = 0 il y a :
♦ continuité de la composante normale du champ magnétique :

$$\boxed{\mathbf{N}.\left(\mathbf{B}_i(\mathbf{r}',t)+\mathbf{B}_r(\mathbf{r}',t)\right)=\mathbf{0}}$$

♦ discontinuité de la composante tangentielle du champ magnétique s'il existe, sur ce plan, une densité superficielle de courant non nulle, soit :

$$\boxed{\mathbf{B}_{it}(\mathbf{r}',t)+\mathbf{B}_{rt}(\mathbf{r}',t)=\mu_0\mathbf{N}\wedge\mathbf{j}_s(\mathbf{r}',t)}$$

12. L'onde réfléchie étant plane on a :

$$\boxed{\mathbf{B}_r(\mathbf{r},t)=\frac{\mathbf{k}_r\wedge\mathbf{E}_r(\mathbf{r},t)}{\omega}=-\frac{E_0}{c}\cos(\mathbf{k}_r.\mathbf{r}-\omega t)\mathbf{e}_{yr}}$$

13. La densité superficielle de charge est nulle car le champ électrique est uniquement tangentiel.

14. La densité superficielle de courant est telle que :

$$\boxed{\mathbf{j}_s(\mathbf{r}',t)=\frac{1}{\mu_0}\left(\mathbf{B}_{it}(\mathbf{r}',t)+\mathbf{B}_{rt}(\mathbf{r}',t)\right)\wedge\mathbf{N}=\frac{2E_0}{\mu_0 c}\cos i\cos(\mathbf{k}_i.\mathbf{r}'-\omega t)\mathbf{e}_{xi}}$$

Mécanique du point : satellite.

15. Dans le référentiel $\mathcal{R}_T$, galiléen, la deuxième loi de Newton appliquée au satellite implique :

$$\mathbf{f}=m\,\mathbf{a}(S/\mathcal{R}_T)=-\mathcal{G}\,mM\frac{\mathbf{TS}}{\|\mathbf{TS}\|^3}$$

On est en présence d'un mouvement à force centrale ; la trajectoire du satellite est plane et son plan contient T.

16. La trajectoire du satellite sera un cercle, contenu dans le plan méridien du lieu où il se trouve passant par les pôles de la Terre (*orbite polaire*), si, à la distance r_0 de T et juste après l'impulsion, il a une vitesse $\mathbf{v}_0$ orthogonale à **TS** et contenue dans le plan méridien considéré.

17. Le satellite, à l'altitude h, est animé d'un mouvement circulaire uniforme dont la période est donnée par la troisième loi de Képler, soit :

$$\boxed{T_0=2\pi\sqrt{\frac{(R+h)^3}{\mathcal{G}M}}}$$

18. L'énergie mécanique du satellite sur sa trajectoire est :

$$\boxed{\mathcal{E}_m=\mathcal{E}_c+\mathcal{E}_p=\frac{1}{2}mv_0^2-\mathcal{G}\frac{mM}{R+h}=\mathcal{G}\frac{mM}{2(R+h)}-\mathcal{G}\frac{mM}{R+h}=-\mathcal{G}\frac{mM}{2(R+h)}}$$

si on suppose nulle l'énergie potentielle de gravitation à l'infini.

19. Au niveau du sol la vitesse du satellite, dans $\mathcal{R}_T$, est celle du point coïncidant avec la surface terrestre soit :

$$\mathbf{v}(O/\mathcal{R}_T) = (\Omega\,\mathbf{e}_{z_T}) \wedge \mathbf{TO} = \Omega R \cos\lambda\,\mathbf{e}_\varphi$$

Son énergie mécanique est alors :

$$\boxed{\mathcal{E}_{m0} = \frac{1}{2} m\Omega^2 R^2 \cos^2\lambda - \mathcal{G}\frac{mM}{R}}$$

20. Pour placer le satellite sur orbite, à partir du point de lancement O situé sur l'équateur, il faut lui fournir une énergie :

$$\boxed{\mathcal{E}_s = \mathcal{E}_m - \mathcal{E}_{m0} = -\mathcal{G}\frac{mM}{2(R+h)} + \mathcal{G}\frac{mM}{R} - \frac{1}{2} m\Omega^2 R^2 = \mathcal{G}\frac{mM}{2R}\left(\frac{R+2h}{R+h}\right) - \frac{1}{2} m\Omega^2 R^2}$$

Le fait d'effectuer le lancement depuis une base située sur l'équateur (*base française de Kourou en Guyane*) rend cette énergie minimale.

Machine frigorifique.

21. Lorsqu'on amène le fluide de A_0 en A le long de la courbe d'ébullition il en résulte une variation d'entropie $S_A - S_{A_0} = \int_{T_0}^{T_1} c_\ell \frac{dT}{T}$ soit, si on suppose c_ℓ constante :

$$\boxed{S_A - S_{A_0} = c_\ell \ln\left(\frac{T_1}{T_0}\right)}$$

22. Lors de la vaporisation isotherme partielle qui amène le fluide de A_0 en B on a une variation d'entropie :

$$\boxed{S_B - S_{A_0} = x_B \frac{\ell_0}{T_0}}$$

23. La transformation A → B étant isentropique (*adiabatique et réversible*) on a $S_A = S_B$ ce qui nous conduit, compte tenu des résultats précédents, à un titre massique en vapeur en B :

$$\boxed{x_B = c_\ell \frac{T_0}{\ell_0} \ln\left(\frac{T_1}{T_0}\right)}$$

24. Lors de la condensation isotherme totale qui amène le fluide de D en A on a une variation d'entropie :

$$S_A - S_D = -\frac{\ell_1}{T_1}$$

Or l'évolution C→ D est isentropique donc $S_D = S_C = x_C \frac{\ell_0}{T_0} + S_{A_0}$.

Il en résulte que :

$$S_A - S_D = -\frac{\ell_1}{T_1} = S_A - S_C = (S_A - S_{A_0}) - x_C \frac{\ell_0}{T_0} = c_\ell \ln\left(\frac{T_1}{T_0}\right) - x_C \frac{\ell_0}{T_0}$$

On en déduit le titre massique en vapeur en C :

$$\boxed{x_C = \frac{\ell_1}{\ell_0}\frac{T_0}{T_1} + c_\ell \frac{T_0}{\ell_0} \ln\left(\frac{T_1}{T_0}\right)}$$

25. Lors de l'évolution D → A la quantité de chaleur échangée avec le milieu extérieur est :

$$\boxed{Q_1 = \Delta H_{DA} = -\ell_1 < 0}$$

C'est la quantité de chaleur fournie à la source chaude de température T_1.

26. Lors de l'évolution B → C la quantité de chaleur échangée avec le milieu extérieur est :

$$\boxed{Q_0 = \Delta H_{BC} = (x_C - x_B)\ell_0 = \ell_1 \frac{T_0}{T_1} > 0}$$

C'est la quantité de chaleur retirée à la source froide de température T_0.

27. Au cours d'un cycle le travail échangé est, d'après le premier principe de la thermodynamique et compte tenu que les évolutions CD et AB sont isentropiques :

$$\boxed{W = -(Q_0 + Q_1) = \ell_1\left(1 - \frac{T_0}{T_1}\right) > 0}$$

C'est le travail reçu par la machine.

28. Cette machine thermique présente donc une efficacité :

$$\boxed{\eta = \frac{Q_0}{W} = \frac{T_0}{T_1 - T_1} = 13{,}4}$$

Diffusion thermique.

29. Le coefficient de diffusion thermique s'exprime en $W.m^{-1}.K^{-1}$.

30. Pour ce système unidimensionnel, en régime stationnaire, en l'absence de terme de production, l'équation de diffusion thermique se réduit à : $\frac{d^2T(x)}{dx^2} = 0$. Elle s'intègre en : $T(x) = Ax + B$.

L'hypothèse de l'énoncé suppose une température continue à la jonction c'est-à-dire en x = 0. Ainsi les conditions aux limites sur le cylindre C_1, $T(-\ell_1) = T_1$ et $T(0) = T_0$, conduisent à :

$$\boxed{T(x) = T_0 + \frac{(T_0 - T_1)}{\ell_1}x}$$

31. On a, d'après la loi de Fourier, $j_{th} = -\lambda_1 \frac{dT(x)}{dx} = \frac{\lambda_1}{\ell_1}(T_1 - T_0)$ d'où $\phi_{th} = \frac{\lambda_1 s}{\ell_1}(T_1 - T_0)$. On en déduit la résistance thermique de C_1 :

$$\boxed{R_{th1} = \frac{T_1 - T_0}{\phi_{th}} = \frac{\ell_1}{\lambda_1 s}}$$

32. Par analogie, la résistance thermique de C_2 est $R_{th2} = \frac{\ell_2}{\lambda_2 s}$. Les deux résistances sont montées en série - conservation du courant thermique à la jonction - d'où la résistance thermique de l'ensemble :

$$\boxed{R_{th} = \frac{\ell_1}{\lambda_1 s} + \frac{\ell_2}{\lambda_2 s}}$$

33. La conservation du flux thermique à la jonction se traduit par :

$$\phi_{th1} = \frac{T_1 - T_0}{R_{th1}} = \frac{T_0 - T_2}{R_{th2}}$$

On en déduit la température commune aux deux barreaux en x = 0 :

$$\boxed{T_0 = \frac{R_{th2}T_1 + R_{th1}T_2}{R_{th1} + R_{th2}}}$$

C'est le barycentre des températures T_1 et T_2 affectées, respectivement, des coefficients R_{th2} et R_{th1}.

Électrocinétique : régime transitoire.

34. Quand l'interrupteur K est fermé la partie supérieure du circuit est galvaniquement isolée et sa charge électrique se conserve, soit :

$$q_1(t) + q_2(t) = Q_0$$

qui entraîne :

$$\frac{dq_2(t)}{dt} = -\frac{dq_1(t)}{dt} = i(t)$$

D'autre part la loi des mailles appliquée au circuit nous donne :

$$\frac{q_1(t)}{C_1} - \frac{q_2(t)}{C_2} - Ri(t) = 0$$

En dérivant par rapport au temps on obtient l'équation différentielle :

$$\frac{di(t)}{dt} + \frac{i(t)}{\tau} = 0$$

si on pose :

$$\tau = \frac{RC_1C_2}{C_1 + C_2}$$

35. A l'instant $t = 0^+$ on a $i(0^+) = \frac{Q_0}{RC_1}$ donc, l'équation différentielle précédente s'intègre en :

$$i(t) = \frac{Q_0}{RC_1}\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

36. L'énergie dissipée sous forme d'effet Joule dans la résistance à la fin du régime transitoire (*théoriquement au bout d'un temps infini*) est :

$$W_R = \int_0^{+\infty} Ri^2(t)dt = \frac{C_2Q_0^2}{2C_1(C_1 + C_2)}$$

Notons que cette énergie ne dépend pas de la valeur de la résistance : lorsque celle-ci est très faible, l'intensité du courant est très grande de manière à ce que l'intégrale soit finie.

37. A la fin du régime transitoire on a deux condensateurs en parallèle portant les charges électriques respectives Q_1 et Q_2 telles que :

$$\frac{Q_1}{C_1} = \frac{Q_2}{C_2} = \frac{Q_0}{C_1 + C_2}$$

On en déduit aisément :

$$Q_1 = \frac{C_1Q_0}{C_1 + C_2} \quad , \quad Q_2 = \frac{C_2Q_0}{C_1 + C_2}$$

38. La variation d'énergie électrostatique de l'ensemble des deux condensateurs est alors :

$$\Delta\mathcal{E} = \left(\frac{Q_1^2}{2C_1} + \frac{Q_2^2}{2C_2}\right) - \frac{Q_0^2}{2C_1} = -\frac{C_2Q_0^2}{C_1(C_1 + C_2)}$$

39. Le bilan d'énergie électrique du circuit se traduit par :

$$\Delta\mathcal{E} + W_R = 0$$

40. La différence d'énergie électrostatique $\mathcal{E}_i - \mathcal{E}_f = -\Delta\mathcal{E}$, récupérable sous forme de travail, a été utilisée pour provoquer la circulation des charges dans la résistance. Or l'énergie fournie aux électrons dans une résistance est dissipée sous forme de chaleur. Le bilan d'énergie totale de ce système se traduit alors par :

$$\Delta U - W_R = 0$$