ICNA - SESSION 2004
ÉPREUVE COMMUNE DE PHYSIQUE
CORRIGÉ

Mécanique du solide.

1. Le cylindre $\mathcal{C}$ roule sans glisser sur le plan horizontal xOy tout en restant dans le plan vertical xOz (*mouvement plan sur plan*) ainsi :

$$\mathbf{V}(\mathrm{I},\mathcal{C}/\mathcal{R}) = \mathbf{V}(\mathrm{G},\mathcal{C}/\mathcal{R}) + \boldsymbol{\omega}(\mathcal{C}/\mathcal{R}) \wedge \mathbf{GI} = (\mathrm{V} - \mathrm{a}\,\omega)\mathbf{e}_x = \mathbf{0}$$

Donc, à l'instant initial, $V_0 = a\omega_0$.
Le théorème de Koenig relatif à l'énergie cinétique nous conduit alors à :

$$\boxed{\mathrm{K}_0(\mathcal{C}/\mathcal{R}) = \mathrm{K}_0([\mathrm{G}]/\mathcal{R}) + \mathrm{K}_0(\mathcal{C}/\mathcal{R}^*) = \frac{1}{2}\mathrm{m}\mathrm{V}_0^2 + \frac{1}{2}\mathrm{J}\omega_0^2 = \frac{3}{4}\mathrm{m}\mathrm{V}_0^2}$$

2. On applique à $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{R}$ le théorème de la puissance cinétique : $\dfrac{\mathrm{dK}(\mathcal{C}/\mathcal{R})}{\mathrm{dt}} = \mathcal{P}_{ext}$. Comme $\mathcal{C}$ roule sans glisser sur un plan horizontal, seul le couple de freinage développe une puissance non nulle au cours du mouvement, soit : $\mathcal{P}_{ext} = \mathbf{C}_f.\boldsymbol{\omega}(\mathcal{C}/\mathcal{R}) = -\mathrm{C}_f\omega = -\mathrm{C}_f\dfrac{\mathrm{V}}{\mathrm{a}}$. On en déduit l'équation différentielle :

$$\frac{3}{2}\mathrm{m}\frac{\mathrm{dV(t)}}{\mathrm{dt}} = -\frac{\mathrm{C}_f}{\mathrm{a}}$$

qui, compte tenu que $V(0) = V_0$, s'intègre en :

$$\boxed{\mathrm{V(t)} = -\frac{2\mathrm{C}_f}{3\mathrm{am}}\mathrm{t} + \mathrm{V}_0}$$

3. Le cylindre s'arrête à l'instant $t_0 > 0$ tel que $V(t_0) = 0$, soit $t_0 = \dfrac{3amV_0}{2C_f}$. Par ailleurs l'intégration de V(t), avec x(0) = 0, nous conduit à $\mathrm{x(t)} = -\dfrac{\mathrm{C}_f}{3\mathrm{am}}\mathrm{t}^2 + \mathrm{V}_0\mathrm{t}$. On en déduit la distance de freinage :

$$\boxed{\mathrm{x}_0 = \mathrm{x}(\mathrm{t}_0) = \frac{3\mathrm{ma}}{4\mathrm{C}_f}\mathrm{V}_0^2}$$

4. On applique le théorème de la résultante dynamique (*ou théorème de la résultante cinétique*) à $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{R}$: $\mathrm{m}\mathbf{a}(\mathcal{C}/\mathcal{R}) = \mathbf{T} + \mathbf{N} + \mathrm{m}\mathbf{g}$. En projection, respectivement suivant $\mathbf{e}_x$ et $\mathbf{e}_z$, on en déduit les deux équations scalaires :

$$\mathrm{m}\frac{\mathrm{dV(t)}}{\mathrm{dt}} = \mathrm{T} \quad , \quad 0 = \mathrm{N} - \mathrm{mg}$$

En utilisant l'équation différentielle obtenue à la question **2** il vient :

$$\mathrm{T} = -\frac{2\mathrm{C}_f}{3\mathrm{a}} \quad , \quad \mathrm{N} = \mathrm{mg}$$

D'après les lois de Coulomb-Morin sur le frottement de glissement, le cylindre ne glisse pas tant que $|T| < fN$, soit : $\dfrac{1}{C_f} > \dfrac{2}{3afmg}$. Avec le résultat de la question **3**, on observe que la distance de freinage doit être telle que :

$$\boxed{\mathrm{x}_0 > \mathrm{x}_{0\,\mathrm{min}} = \frac{\mathrm{V}_0^2}{2\mathrm{fg}}}$$

5. L'ensemble cylindre/système de freinage n'échange que de la chaleur avec le milieu extérieur. Le premier principe de la thermodynamique nous donne :

$$\boxed{Q = \Delta E = -K_0(C/\mathcal{R}) = -\frac{3}{4}mV_0^2}$$

6. Si le cylindre glisse dès l'instant t = 0 alors |T| = fN = fmg, cette force de frottement étant dirigée en sens opposé à la vitesse de glissement c'est-à-dire selon $-\mathbf{e}_x$. Le théorème de l'énergie cinétique :

$$0 - \frac{3}{4}mV_0^2 = -fmgx_1$$

donne la nouvelle distance de freinage :

$$\boxed{x_1 = \frac{3V_0^2}{4fg}}$$

Optique géométrique.

7. Une image nette se forme sur la rétine de l'observateur si le microscope donne de l'objet A_0B_0 une image à l'infini. Pour cela il faut que l'image intermédiaire se forme dans le plan focal objet de $\mathcal{L}_1$, c'est-à-dire que F_2 soit le conjugué image de A_0 à travers $\mathcal{L}_1$. En utilisant la formule de conjugaison de Descartes :

$$-\frac{1}{\overline{O_1A_0}} + \frac{1}{\overline{O_1F_2}} = \frac{1}{f'_1}$$

avec $\overline{O_1A_0} = p_0$ et $\overline{O_1F_2} = \overline{O_1F'_1} + \overline{F'_1F_2} = f'_1 + \Delta$ (Δ : *intervalle optique*) on obtient :

$$\boxed{p_0 = -\frac{f'_1(f'_1+\Delta)}{\Delta}}$$

Remarque. On peut aussi utiliser la formule de conjugaison de Newton :

$$\overline{F_1A_0}.\overline{F'_1F_2} = (f'_1 + p_0).\Delta = -f'_1$$

d'où le résultat précédent.

8. Le grandissement transversal de l'objectif est obtenu par la formule de Newton :

$$\boxed{\gamma_{ob} = -\frac{\overline{F'_1F_2}}{f'_1} = -\frac{\Delta}{f'_1}}$$

9. A l'œil nu l'objet est vu sous l'angle : $\alpha_0 = \frac{\overline{A_0B_0}}{d_m}$. Le même objet, placé dans le plan focal image de l'oculaire, est vu sous l'angle : $\alpha_i = \frac{\overline{A_0B_0}}{f'_2}$. Le grossissement de l'oculaire est donc :

$$\boxed{G_{oc} = \frac{d_m}{f'_2}}$$

10. Le grossissement commercial du microscope est donné par :

$$\boxed{G_m = \left(\gamma_{ob}\frac{\overline{A_0B_0}}{f'_2}\right).\frac{d_m}{\overline{A_0B_0}} = -\frac{\Delta}{f'_1}G_{oc}}$$

11. La puissance du microscope est :

$$\boxed{\mathcal{P} = \left(\gamma_{ob}\frac{\overline{A_0B_0}}{f'_2}\right).\frac{1}{\overline{A_0B_0}} = -\frac{\Delta}{f'_1f'_2}}$$

12. Le cercle oculaire est le conjugué image de la monture de l'objectif à travers L_2. Si on note C – situé sur l'axe optique - le centre du cercle oculaire, on a :

$$-\frac{1}{\overline{O_2O_1}} + \frac{1}{\overline{O_2C}} = \frac{1}{f'_2}$$

avec : $\overline{O_2O_1} = -(f'_1 + f'_2 + \Delta)$, qui nous donne :

$$\boxed{d_1 = \overline{O_2C} = \frac{f'_2\,(f'_1 + f'_2 + \Delta)}{f'_1 + \Delta}}$$

13. Le diamètre d du cercle oculaire est tel que :

$$\boxed{d = |\gamma_{oc}|D = \left|\frac{\overline{O_2C}}{\overline{O_2O_1}}\right|D = \frac{f'_2}{f'_1 + \Delta}D}$$

Électrocinétique : régime sinusoïdal.

Par définition, la puissance moyenne fournie par la source idéale de courant au circuit est $\mathcal{P} = \frac{1}{2}\Re e\{\underline{u}.\underline{i}^*\}$, où intensité et tension sont liées par la relation :

$$\underline{i} = \underline{Y}.\underline{u} = \left[\frac{1}{R} + j\left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)\right]\underline{u}$$

Il en résulte que :

$$\mathcal{P} = \frac{RI_0^2}{1 + R^2\left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)^2}$$

La fonction $f(\omega) = 1 + R^2\left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)^2$, telle que $(C\omega)\left(\frac{1}{L\omega}\right) = \frac{C}{L} = Cte$, passe par un minimum pour une pulsation $\omega = \omega_0$ telle que $LC\omega_0^2 = 1$. Dans ces conditions la puissance moyenne passe par un maximum qui vaut : $\mathcal{P}_{max} = RI_0^2$.

Si on pose $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ et $Q = RC\omega_0 = \frac{R}{L\omega_0}$, alors on peut mettre la puissance moyenne sous la forme :

$$\boxed{\mathcal{P} = \frac{\mathcal{P}_{max}}{1 + Q^2\left(x - \frac{1}{x}\right)^2}}$$

14. Numériquement on obtient : $\omega_0 = 10^3$ rad.s^{-1} et $\mathcal{P}_{max} = 1$ W.

15. Facteur de qualité du circuit : Q = 10.

16. On a $\mathcal{P} = \frac{\mathcal{P}_{max}}{2}$ quand $Q^2\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = 1$ ce qui nous conduit aux solutions x_1 et x_2 telles que :

$$x_1 - \frac{1}{x_1} = -\frac{1}{Q} \quad , \quad x_2 - \frac{1}{x_2} = \frac{1}{Q}$$

Par addition on obtient : $(x_1 + x_2)\left(1 - \frac{1}{x_1x_2}\right) = 0$ soit $x_1x_2 = 1$.

Par soustraction il vient : $(x_2 - x_1)\left(1 + \frac{1}{x_1x_2}\right) = \frac{2}{Q}$ d'où $x_2 - x_1 = \frac{1}{Q}$.

On en déduit la bande passante :

$$\boxed{\Delta\omega_0 = \frac{\omega_0}{Q} = 100\,\text{rad.s}^{-1}}$$

17. La tension aux bornes des éléments en parallèle est $u(t) = U\sqrt{2}\cos(\omega t + \varphi)$ avec :

$$U = \frac{I_0}{Y} = \frac{RI_0}{\sqrt{1+Q^2\left(x-\frac{1}{x}\right)^2}} \quad , \quad \varphi = -\arg(\underline{Y}) = -\mathrm{Arc}\tan\left[Q\left(x-\frac{1}{x}\right)\right]$$

L'intensité du courant qui traverse la bobine est alors $i_L(t) = I_L\sqrt{2}\cos(\omega t + \varphi_L)$ avec :

$$\boxed{I_L = \frac{U}{L\omega} = I_0 \frac{Q}{x\sqrt{1+Q^2\left(x-\frac{1}{x}\right)^2}} \quad , \quad \varphi_L = \varphi - \frac{\pi}{2}}$$

18. On étudie la fonction : $f(x) = Q^2x^4 + (1-2Q^2)x^2 + Q^2$. Sa dérivée, $f'(x) = 2x\left(2Q^2x^2 + 1 - 2Q^2\right)$ s'annule pour :

♦ $x_0 = 0$ si $Q < \frac{1}{\sqrt{2}}$ (notons que f'(x) > 0 pour x > 0) ;

♦ $x_0 = 0$ et $x_1 = \sqrt{1-\frac{1}{2Q^2}} < 1$ si $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Dans ce dernier cas on vérifie aisément que f(x) passe par un minimum, donc I_L par un maximum, pour $x = x_1$.

19. La pulsation correspondante est :

$$\boxed{\omega_1 = \omega_0\sqrt{1-\frac{1}{2Q^2}} < \omega_0}$$

20. La valeur de I_{Lmax} est alors :

$$\boxed{I_{L\,max} = I_0 \frac{2Q^2}{\sqrt{4Q^2-1}}}$$

Cette surintensité est susceptible de conduire à la destruction du composant.

Statique des fluides.

21. Par définition du centre de masse d'un ensemble de corps homogènes on a :

$$\left(m + \rho_{Hg}V_0\right)\mathbf{OG}_d = m\mathbf{OG}_T$$

avec : $\mathbf{OG}_T = \left(\frac{H}{2} + R\right)\mathbf{e}_x = \left(\frac{H}{2} + \left(\frac{3V_0}{4\pi}\right)^{1/3}\right)\mathbf{e}_x$. On en déduit :

$$\boxed{x_d = \mathbf{OG}_d.\mathbf{e}_x = \frac{m\left(\frac{H}{2} + \left(\frac{3V_0}{4\pi}\right)^{1/3}\right)}{m + \rho_{Hg}V_0} = 6{,}62\text{cm}}$$

22. En utilisant la même relation de définition on peut écrire :

$$\rho\left(Sh + V_0\right)\mathbf{OG}_L = \rho\left(\frac{h}{2} + R\right)Sh\mathbf{e}_x$$

d'où on tire :

$$\boxed{x_L = \mathbf{OG}_L.\mathbf{e}_x = \frac{Sh\left(h+2R\right)}{2\left(V_0 + Sh\right)}}$$

23. Le densitomètre conserve une position d'équilibre stable, tige verticale, si G_d est au-dessous de G_L, soit :

$$\mathbf{G}_d\mathbf{G}_L.\mathbf{e}_x = x_L - x_d = \frac{Sh\left(h+2R\right)}{2\left(V_0 + Sh\right)} - x_d > 0$$

On en déduit l'inéquation en h :

$$h^2 - 2(x_d - R)h - 2\frac{x_d V_0}{S} > 0$$

Par identification avec l'inéquation proposée on obtient :

$$\boxed{b = x_d - R = x_d - \left(\frac{3V_0}{4\pi}\right)^{1/3} = 6\text{cm}}$$

24. De même :

$$\boxed{c = \frac{2x_d V_0}{S} = 13{,}24\text{cm}^2}$$

25. La limite de l'équilibre stable du densitomètre est obtenue lorsque G_d et G_ℓ sont confondus ; dans ce cas la valeur minimale h_m de h doit être solution de : $h_m^2 - 2bh_m - c = 0$. La seule solution physiquement acceptable est :

$$\boxed{h_m = b + \sqrt{b^2 + c} = 13{,}01\text{cm}}$$

26. La valeur minimale ρ_m de ρ mesurable avec ce densitomètre est obtenue pour h = H. Le théorème d'Archimède conduit à écrire : $(m + \rho_{Hg} V_0)g = \rho_m (V_0 + SH)g$; on en déduit :

$$\boxed{\rho_m = \frac{m + \rho_{Hg} V_0}{SH + V_0} = 0{,}76\text{g.cm}^{-3}}$$

27. La valeur maximale ρ_M de ρ mesurable avec ce densitomètre est obtenue pour $h = h_m$. On obtient ainsi, par la même démarche que précédemment :

$$\boxed{\rho_M = \frac{m + \rho_{Hg} V_0}{Sh_m + V_0} = 1{,}68\text{g.cm}^{-3}}$$

Thermodynamique.

28. Le moteur fonctionnant de manière réversible, le bilan entropique se traduit par :

$$\Delta S = S_{éch} = -2MC\int_{T_{c0}}^{T_{c1}} \frac{dT}{T} - \frac{ML}{T_{f0}} = -2MC\ln\left(\frac{T_{c1}}{T_{c0}}\right) - \frac{ML}{T_{f0}} = 0$$

On en déduit la température de la source chaude lorsque la totalité de la glace de la source froide a fondu :

$$\boxed{T_{c1} = T_{c0}\exp\left(-\frac{L}{2CT_{f0}}\right) = 322\text{K}}$$

29. Dans ce cas, le travail total fourni par moteur est, d'après le premier principe, tel que :

$$\boxed{W_1 = -(Q_f + Q_c) = ML + 2MC(T_{c1} - T_{c0}) = -9{,}076.10^6\,\text{J}}$$

30. Le nouveau bilan entropique s'écrit :

$$\Delta S' = S'_{éch} = -2MC\int_{T_{c0}}^{T_0} \frac{dT}{T} - \frac{ML}{T_{f0}} - MC\int_{T_{f0}}^{T_0} \frac{dT}{T} = -MC\ln\left(\frac{T_0^3}{T_{f0}T_{c0}^2}\right) - \frac{ML}{T_{f0}} = 0$$

d'où la température commune des deux sources lorsque le moteur s'arrête de fonctionner :

$$\boxed{T_0 = \left(T_{f0}T_{c0}^2\right)^{1/3}\exp\left(-\frac{L}{3CT_{f0}}\right) = 304{,}8\text{K}}$$

31. Le travail total fourni par le moteur depuis le début de son fonctionnement est alors :

$$\boxed{W_2 = -(Q'_f + Q'_c) = MC(3T_0 - 2T_{c0} - T_{f0}) + ML = -1{,}016.10^7\,\text{J}}$$

32. Le rendement thermique global du moteur est donc :

$$\boxed{\eta = -\frac{W_2}{Q'_c} = 1 + \frac{Q'_f}{Q'_c} = 1 + \frac{L + C(T_0 - T_{f0})}{2C(T_0 - T_{c0})} = 0{,}18}$$

33. Dans l'hypothèse où les températures des deux sources seraient maintenues constantes (*moteur fonctionnant suivant un cycle de Carnot réversible*) on obtiendrait un rendement :

$$\boxed{\eta_0 = 1 - \frac{T_{0f}}{T_{0c}} = 0{,}27}$$

Électrocinétique : circuit avec sources liées.

34. On a :

$$v_e(t) = ri(t) - \alpha v_s(t) + (1+\beta)R_0 i(t) \text{ et } v_s(t) = -\beta R i(t)$$

En éliminant $v_s(t)$ entre ces deux relations on obtient la résistance d'entrée du circuit :

$$\boxed{R_e = \frac{v_e(t)}{i(t)} = r + \alpha\beta R + (1+\beta)R_0}$$

35. La force électromotrice du générateur de Thévenin équivalent est $e_{th}(t) = v_s(t)$ en sortie ouverte ($i_s(t) = 0$) soit :

$$\boxed{e_{th}(t) = -\beta R i(t) = -\frac{\beta R}{R_e} v_e(t) = -\frac{\beta R v_e(t)}{r + \alpha\beta R + (1+\beta)R_0}}$$

36. Pour déterminer r_{th}, résistance interne du générateur de Thévenin équivalent, on éteint la source de tension d'entrée ($v_e(t) = 0$), source autonome, mais, **attention**, il ne faut surtout pas éteindre les générateurs contrôlés sinon on obtient un résultat erroné.
On a :

$$v_s(t) = -R\,(i_s(t) + \beta i(t)) \text{ et } (r + (1+\beta)R_0)\,i(t) - \alpha v_s(t) = 0$$

En éliminant i(t) entre ces deux relations on obtient :

$$\boxed{r_{th} = -\frac{v_s(t)}{i_s(t)} = \frac{R\,[r + (1+\beta)R_0]}{r + \alpha\beta R + (1+\beta)R_0}}$$

Évidemment r_{th} n'est autre que la résistance de sortie du montage proposé.

37. Connaissant $e_{th}(t)$ et r_{th} dans la représentation de Thévenin on passe aisément à celle de Norton. Le courant électromoteur $i_N(t)$ du générateur de Norton équivalent est égal au courant de court-circuit du générateur de Thévenin, soit :

$$\boxed{i_N(t) = \frac{e_{th}(t)}{r_{th}} = -\frac{\beta v_e(t)}{r + (1+\beta)R_0}}$$

Évidemment on peut aussi obtenir ce résultat par un calcul direct en court-circuitant la sortie du circuit entre A et B ; dans ce cas $v_s(t) = 0$ ce qui éteint la source liée $\alpha v_s(t)$ et $i_N(t) = -\beta i(t)$.

38. D'autre part, la résistance en parallèle avec la source idéale de courant précédente est :

$$\boxed{R_{th} = r_{th} = \frac{R\,[r + (1+\beta)R_0]}{r + \alpha\beta R + (1+\beta)R_0}}$$

39. La puissance moyenne, calculée sur une période, dissipée dans R_u est : $\mathcal{P}_u = \frac{1}{2}\Re e\{\underline{u}.\underline{i}^*\}$ avec $\underline{u} = \frac{R_u}{R_u + r_{th}}\underline{e}_{th}$ (*utilisation du diviseur de tension*) et $\underline{i} = \frac{\underline{u}}{R_u}$. On en déduit :

$$\boxed{\mathcal{P}_u = \frac{R_u}{(R_u + r_{th})^2} E_{th}^2}$$

E_{th} est l'amplitude de la f.é.m. du générateur équivalent de Thévenin exprimée en volts efficaces.

40. La relation précédente peut se mettre sous la forme : $\mathcal{P}_u = \dfrac{1}{\left(\sqrt{R_u} + \dfrac{r_{th}}{\sqrt{R_u}}\right)^2} E_{th}^2$. Le dénominateur passe par un minimum, donc $\mathcal{P}_u$ par un maximum, pour $R_u = R_{u0}$ telle que :

$$\sqrt{R_{u0}} = \frac{r_{th}}{\sqrt{R_{u0}}}$$

soit :

$$\boxed{R_{u0} = r_{th} = \frac{R\left[r + (1+\beta)R_0\right]}{r + \alpha\beta R + (1+\beta)R_0}}$$

On dit qu'il y a adaptation d'impédance.