ICNA - SESSION 2004
ÉPREUVE OPTIONNELLE DE PHYSIQUE
CORRIGÉ

Mécanique du solide.

1. L'équilibre de la poulie $\mathcal{C}$ se traduit par :

$$\mathbf{T}_0 + \mathbf{T'}_0 + M\mathbf{g} + \mathbf{F}_r = \mathbf{0} \quad , \quad \mathbf{CI} \wedge \mathbf{T}_0 + \mathbf{CJ} \wedge \mathbf{T'}_0 = \mathbf{0}$$

soit :

$$T_0 + T'_0 + Mg - k(x_{C0} - \ell_0) = 0 \quad (1) \qquad (T_0 - T'_0)a = 0 \quad (2)$$

L'équilibre du solide $\mathcal{S}$ se traduit par :

$$m\mathbf{g} - \mathbf{T}_0 = \mathbf{0}$$

soit :

$$mg - T_0 = 0 \quad (3)$$

Des relations (1), (2) et (3) on déduit la position du centre C de la poulie à l'équilibre :

$$\boxed{x_{C0} = \frac{(M+2m)g}{k} + \ell_0}$$

2. Le fil f ne glisse pas sur la poulie soit :

$$\mathbf{V}(J, f/\mathcal{C}) = \mathbf{V}(J, f/\mathcal{R}) - \mathbf{V}(J, \mathcal{C}/\mathcal{R}) = \mathbf{0}$$

Or, $\mathbf{V}(J, f/\mathcal{R}) = \mathbf{0}$ car une extrémité du fil est attachée à un bâti fixe. Il en résulte que :

$$\mathbf{V}(J, \mathcal{C}/\mathcal{R}) = \mathbf{V}(C, \mathcal{C}/\mathcal{R}) + \omega(\mathcal{C}/\mathcal{R}) \wedge \mathbf{CJ} = \mathbf{0}$$

d'où on déduit :

$$\mathbf{V}(C, \mathcal{C}/\mathcal{R}) = \dot{x}_C \mathbf{e}_x = -\omega(\mathcal{C}/\mathcal{R}) \wedge \mathbf{CJ} = -(\dot{\theta}\mathbf{e}_z) \wedge (a\mathbf{e}_y) = a\dot{\theta}\mathbf{e}_x$$

D'autre part ce fil, qui ne glisse pas sur la poulie, est inextensible ce qui implique :

$$\mathbf{V}(G/\mathcal{R}) = \mathbf{V}(I, f/\mathcal{R}) = \mathbf{V}(I, \mathcal{C}/\mathcal{R}) = \mathbf{V}(C, \mathcal{C}/\mathcal{R}) + \omega(\mathcal{C}/\mathcal{R}) \wedge \mathbf{CI} = \mathbf{V}(C, \mathcal{C}/\mathcal{R}) - \omega(\mathcal{C}/\mathcal{R}) \wedge \mathbf{CJ}$$

soit :

$$\boxed{\mathbf{V}(G/\mathcal{R}) = 2\mathbf{V}(C, \mathcal{C}/\mathcal{R}) = 2a\dot{\theta}\mathbf{e}_x}$$

3. On applique le théorème de la puissance cinétique au système $\Sigma = \mathcal{C} \cup \mathcal{S}$ dans $\mathcal{R}$, soit :

$$\frac{dK(\Sigma/\mathcal{R})}{dt} = \mathcal{P}_{ext} + \mathcal{P}_{int}$$

La puissance développée par les forces intérieures est nulle car le fil est inextensible et ne glisse pas sur la poulie.

La puissance développée par les forces extérieures est :

$$\mathcal{P}_{ext} = m\mathbf{g}.\mathbf{V}(G/\mathcal{R}) + M\mathbf{g}.\mathbf{V}(C, \mathcal{C}/\mathcal{R}) + \mathbf{F}_r.\mathbf{V}(C, \mathcal{C}/\mathcal{R}) + \mathbf{M}(C/Cz \to \mathcal{C}).\omega(\mathcal{C}/\mathcal{R})$$

avec :

- ♦ $\mathbf{M}(C/Cz \to \mathcal{C}).\omega(\mathcal{C}/\mathcal{R}) = 0$ car la liaison pivot est supposée parfaite
- ♦ $\mathbf{V}(C, \mathcal{C}/\mathcal{R}) = \dot{x}_C \mathbf{e}_x = \dot{x}\,\mathbf{e}_x = a\dot{\theta}\mathbf{e}_x$
- ♦ $\mathbf{F}_r = -k(x_C - \ell_0)\mathbf{e}_x = -k[x + (x_{C0} - \ell_0)]\mathbf{e}_x$

On en déduit, compte tenu du résultat de la question **1** :

$$\mathcal{P}_{ext} = -kx\dot{x}$$

L'énergie cinétique de Σ dans $\mathcal{R}$ est :

$$K(\Sigma/\mathcal{R}) = \frac{1}{2}m(2\dot{x})^2 + \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 = \frac{1}{4}(8m + 3M)\dot{x}^2$$

En reportant ces résultats dans l'expression du théorème de la puissance cinétique on obtient l'équation différentielle du mouvement en x :

$$\boxed{\ddot{x} + \frac{2k}{3M+8m}x = 0}$$

4. C'est l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique de pulsation :

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{3M+8m}}}$$

5. Avec les conditions initiales $x(0) = \frac{1}{2}\varepsilon_0$ et $\dot{x}(0) = 0$ l'équation différentielle obtenue à la question 3 s'intègre en :

$$x(t) = \frac{\varepsilon_0}{2}\cos(\omega_0 t)$$

Le théorème de la résultante dynamique appliqué au solide S dans $\mathcal{R}$ nous conduit à :

$$m\ddot{x}_P = 2m\ddot{x} = mg - T$$

On en déduit la tension qu'exerce, à chaque instant, la partie mobile du fil sur la poulie :

$$\boxed{T(t) = mg + m\omega_0^2\varepsilon_0\cos(\omega_0 t)}$$

6. Le théorème du moment cinétique appliqué à C dans $\mathcal{R}$ en projection selon Cz nous donne :

$$J\ddot{\theta} = J\frac{\ddot{x}}{a} = (T - T')a$$

Compte tenu du résultat précédent on en déduit la tension qu'exerce, à chaque instant, la partie fixe du fil sur la poulie, soit :

$$\boxed{T'(t) = mg + \omega_0^2\varepsilon_0\left(m + \frac{M}{4}\right)\cos(\omega_0 t)}$$

Mouvement d'une fusée.

7. On considère le système fermé F constitué :

♦ à l'instant de date t, par la fusée et son contenu ;

♦ à l'instant de date t + Δt, par la fusée, son contenu et la masse $\Delta m_g = -\Delta m$ de gaz éjecté pendant la durée Δt.

Les quantités de mouvement de ce système, à ces deux instants, sont respectivement :

$$\mathbf{p}_F(t) = m(t)\mathbf{V}(t) \quad , \quad \mathbf{p}_F(t+\Delta t) = m(t+\Delta t)\mathbf{V}(t+\Delta t) - \Delta m(\mathbf{u} + \mathbf{V}(t+\Delta t))$$

Il en résulte que :

$$\frac{d\mathbf{p}_F(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{\mathbf{p}_F(t+\Delta t) + \mathbf{p}_F(t)}{\Delta t}\right) = \frac{d(m(t)\mathbf{V}(t))}{dt} - \frac{dm(t)}{dt}(\mathbf{u} + \mathbf{V}(t)) = m(t)\frac{d\mathbf{V}(t)}{dt} + D\mathbf{u}$$

en introduisant le débit massique des gaz $D = \frac{dm_g}{dt} = -\frac{dm}{dt}$.

Le théorème de la résultante cinétique, appliqué à F dans $\mathcal{R}$, nous conduit alors, en négligeant la résistance de l'air, à :

$$\frac{d\mathbf{p}_F(t)}{dt} = m(t)\frac{d\mathbf{V}(t)}{dt} + D\mathbf{u} = m(t)\mathbf{g}$$

Compte tenu que $m(t) = m_0 - Dt$, on en déduit l'accélération de la fusée :

$$\boxed{\mathbf{a}(t) = \mathbf{g} - \frac{\mathbf{u}}{\frac{m_0}{D} - t} = \mathbf{g} - \frac{\mathbf{u}}{\tau - t}}$$

8. Le carburant sera totalement consommé au bout d'une durée t_1 - comptée depuis l'instant origine - telle que :

$$m(t_1) = m_0 - Dt_1 = m_0(1-\alpha)$$

soit :

$$\boxed{t_1 = \frac{m_0\alpha}{D} = \alpha\tau}$$

9. La projection du vecteur accélération suivant Oz nous donne :

$$\frac{dV(t)}{dt} = -g + \frac{u}{\tau - t}$$

Compte tenu que V(0) = 0 il en résulte que :

$$V(t) = -gt - u\ln\left(1 - \frac{t}{\tau}\right)$$

La vitesse de la fusée à l'instant de date t_1 est alors :

$$\boxed{V_1 = V(t_1) = -g\alpha\tau - u\ln(1-\alpha)}$$

10. Sachant que z(0) = 0 on obtient, en intégrant V(t), l'altitude atteinte par la fusée pendant la phase de combustion :

$$z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + u\tau\left[\left(1 - \frac{t}{\tau}\right)\ln\left(1 - \frac{t}{\tau}\right) + \frac{t}{\tau}\right]$$

A la fin de la combustion du carburant cette altitude est :

$$\boxed{z_1 = z(t_1) = -\frac{1}{2}g\alpha^2\tau^2 + u\tau\left[(1-\alpha)\ln(1-\alpha) + \alpha\right]}$$

11. A l'instant t = 0 on a a(0) = g ce qui nous donne :

$$\boxed{\tau = \frac{u}{2g} = 200\text{s}}$$

12. Si $\alpha = 1/2$ alors $z_1 \approx 71$ km.

13. L'altitude maximale z_2 est atteinte lorsque la vitesse de la fusée s'annule. Lorsque tout le carburant a été consommé la fusée, de masse $m_0(1-\alpha)$ constante, constitue un système fermé ; on peut donc lui appliquer le théorème de l'énergie cinétique entre l'instant t_1 et l'instant t_2 où sa vitesse s'annule. Il vient :

$$0 - \frac{1}{2}m_0(1-\alpha)V_1^2 = -m_0 g(1-\alpha)(z_2 - z_1)$$

d'où on déduit :

$$\boxed{z_2 = z_1 + \frac{V_1^2}{2g} = z_1 + \frac{1}{2g}\left(g\alpha\tau + u\ln(1-\alpha)\right)^2 \approx 225\text{km}}$$

Électrostatique des conducteurs.

14. La sphère métallique S_0, de capacité $C_0 = 4\pi\varepsilon_0 R_0$, portée au potentiel V_0, acquiert la charge électrique $Q_0 = 4\pi\varepsilon_0 R_0 V_0$, puis est isolée. Cette charge, invariable, se répartit uniformément sur sa surface avec une densité :

$$\boxed{\sigma_0 = \frac{Q_0}{4\pi R_0^2} = \varepsilon_0 \frac{V_0}{R_0}}$$

15. Son énergie électrostatique est alors :

$$\boxed{\mathcal{E} = \frac{1}{2}Q_0 V_0 = 2\pi\varepsilon_0 R_0 V_0^2}$$

16. Quand on entoure S_0 par la sphère creuse S_1, par influence totale, la paroi interne de S_1 acquiert la charge $Q_{1i} = -Q_0$. S_1 étant isolée et initialement neutre, sa charge totale se conserve et sa paroi extérieure porte alors la charge $Q_{1e} = +Q_0$.

La symétrie sphérique du problème implique que le champ électrostatique, créé par ces charges à l'extérieur des conducteurs, est tel que $\mathbf{E} = E(r)\mathbf{e}_r$.

Le théorème de Gauss appliqué à une surface sphérique concentrique aux sphères, de rayon $r > R_e$, nous conduit à :

$$\mathbf{E} = \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathbf{e}_r$$

Le potentiel étant nul à l'infini, il résulte de $\mathbf{E} = -\nabla V$ que : $V(r) = \dfrac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0 r}$. Or S_1 est une surface équipotentielle, d'où :

$$V_1 = V(R_e) = \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0 R_e} = \frac{R_0}{R_e}V_0$$

17. Dans l'espace inter conducteur ($R_0 < r < R_i$) le champ électrique conserve la même expression que précédemment. Le calcul de sa circulation du point P à la sphère S_1 le long d'une ligne de champ nous conduit à :

$$V(P) = V_1 + \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_i}\right) = \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{R_e} - \frac{1}{R_i}\right)$$

18. On impose $V'_1 = 0$ en reliant S_1 au sol. La circulation de $\mathbf{E}$ le long d'une ligne de champ dans l'espace inter conducteur nous conduit alors à :

$$V'_0 = \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_0} - \frac{1}{R_i}\right) = V_0\left(1 - \frac{R_0}{R_i}\right)$$

Notons que cette situation, où $Q_{1e} = 0$ et $Q_{1i} = -Q_0$, correspond à un condensateur sphérique de capacité $C = \dfrac{4\pi\varepsilon_0 R_0 R_i}{R_i - R_0}$ soumis à la tension V'_0.

19. On a le même condensateur que précédemment mais soumis à la tension V''_0. Dans ce cas il acquiert la charge Q'_0 telle que :

$$Q'_0 = CV''_0 = 4\pi\varepsilon_0 \frac{R_0 R_i}{R_i - R_0} V''_0$$

20. L'énergie électrostatique du système formé par l'ensemble des deux sphères est alors égale à l'énergie stockée par le condensateur, soit :

$$\mathcal{E}' = \frac{1}{2}Q'_0\, V''_0 = 2\pi\varepsilon_0 \frac{R_0 R_i}{R_i - R_0} V''^2_0$$

Optique géométrique : lunette de Galilée.

21. Le système doit être afocal c'est-à-dire tel que $F_{i1} = F_{o2}$. La distance entre les centres optiques des deux lentilles est alors :

$$e = \overline{O_1O_2} = f'_1 + f'_2 = 10\text{cm}$$

22. On note $\overline{A'B'}$ l'image, à travers L_1, d'un objet à l'infini, qui sert d'objet virtuel pour L_2. Dans les conditions de Gauss on a :

$$\overline{A'B'} = \alpha_1.\overline{F_{i1}O_1} = \alpha_2.\overline{F_{o2}O_2}$$

On en déduit :

$$\alpha_2 = \alpha_1 \frac{\overline{O_1F_{i1}}}{\overline{O_2F_{o2}}} = -\alpha_1 \frac{f'_1}{f'_2}$$

23. Le grossissement de l'instrument est alors :

$$G = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} = -\frac{f'_1}{f'_2} = 3$$

24. Le grandissement transversal de la lunette est :

$$\boxed{\gamma = \frac{\overline{A''B''}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{A''B''}}{\overline{A'B'}} \cdot \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \left(-\frac{\overline{O_2F_{o2}}}{\overline{F_{o2}A'}}\right)\left(-\frac{\overline{F_{i1}A'}}{\overline{O_1F_{i1}}}\right) = -\frac{f'_2}{f'_1}}$$

25. On ne touche pas au tirage donc la lunette reste afocale ($F_{i1} = F_{o2}$). Les positions limites de l'objet sont telles que les positions limites de l'image sont les limites de vision distincte de l'observateur. L'une de ses limites est l'infini, l'image étant alors à l'infini. L'autre correspond au punctum proximum donc à un objet plus rapproché de la lunette. Soit A cette position $\left(\overline{F_{o1}A} = 2f'_1 + f'_2 + d - d_m\right)$ et A" son image dans la lunette $\left(\overline{F_{i2}A''} = -f'_2 + d - \delta_m\right)$.

Avec la formule de conjugaison de Newton on peut écrire respectivement pour chaque lentille :

$$\overline{F_{o1}A}.\overline{F_{i1}A'} = -f'^2_1 \quad , \quad \overline{F_{o2}A'}.\overline{F_{i2}A''} = -f'^2_2$$

En faisant le rapport membre à membre de ces deux relations il vient :

$$\frac{2f'_1 + f'_2 + d - d_m}{-f'_2 + d - \delta_m} = \left(\frac{f'_1}{f'_2}\right)^2$$

On en déduit :

$$\boxed{d_m = 2f'_1 + f'_2 + d - \left(\frac{f'_1}{f'_2}\right)^2 \left(d - \delta_m - f'_2\right) = 144\text{cm}}$$

26. Dans ce cas limite le grossissement de la lunette est :

$$\boxed{G_1 = \frac{\alpha_i}{\alpha_0} = \frac{\overline{A''B''}}{\overline{OA''}} \cdot \frac{\overline{OA}}{\overline{AB}} = \gamma \frac{d_m}{\delta_m} = 2{,}4}$$

27. On suppose la position de l'oeil inchangée soit $d = \overline{O_2O} = 2\text{cm}$. Par contre la lunette n'est plus afocale car il faut modifier le tirage. L'image définitive doit être telle que $\overline{OA''} = -\delta_M = -25\text{cm}$.

L'image intermédiaire est dans le plan focal image de L_1 et sert d'objet virtuel pour L_2, soit :

$$\overline{F_{o2}F_{i1}}.\overline{F_{i2}A''} = \overline{F_{o2}F_{i1}}.\left(-f'_2 + d - \delta_M\right) = -f'^2_2$$

qui nous donne :

$$\overline{F_{o2}F_{i1}} = \frac{f'^2_2}{\delta_M - d + f'_2} = 1{,}39\text{cm}$$

F_{i1} se trouve donc à 1,39 cm en arrière de F_{o2}. Il a donc fallu diminuer le tirage de l'instrument qui est maintenant égal à :

$$\boxed{e' = \overline{O_1O_2} = \overline{O_1F_{i1}} + \overline{F_{i1}F_{o2}} + \overline{F_{o2}O_2} = f'_1 + \overline{F_{i1}F_{o2}} + f'_2 = 8{,}61\text{cm}}$$

28. Dans ce cas le grossissement de la lunette devient :

$$G_2 = \frac{\alpha_i}{\alpha_0} = \frac{\overline{A''B''}}{\overline{OA''}} \cdot \frac{\overline{O_1F_{i1}}}{\overline{F_{i1}B'}} = \frac{\overline{A''B''}}{\overline{F_{i1}B'}} \cdot \frac{\overline{O_1F_{i1}}}{\overline{OA''}} = -\frac{\overline{F_{i2}A''}}{\overline{O_2F_{i2}}} \cdot \frac{\overline{O_1F_{i1}}}{\overline{OA''}}$$

soit :

$$\boxed{G_2 = \frac{f'_1}{|f'_2|}\left(1 - \frac{d - f'_2}{\delta_M}\right) = 2{,}16}$$

Électrocinétique : régime transitoire.

29. A la fin du régime transitoire les deux condensateurs sont soumis à la même tension donc :

$$\frac{Q_1}{C_1} = \frac{Q_2}{C_2}$$

Par ailleurs la partie inférieure du circuit étant galvaniquement isolée sa charge totale se conserve, soit :

$$Q_1 + Q_2 = Q_0$$

Des ces deux relations on déduit la charge finale du condensateur C_1 :

$$\boxed{Q_1 = Q_0 \frac{C_1}{C_1 + C_2}}$$

30. La charge finale du condensateur C_2 est alors :

$$\boxed{Q_2 = Q_0 - Q_1 = Q_0 \frac{C_2}{C_1 + C_2}}$$

31. La variation d'énergie électrostatique de l'ensemble des deux condensateurs est :

$$\Delta\mathcal{E} = \mathcal{E}_f - \mathcal{E}_i = \left(\frac{1}{2}\frac{Q_1^2}{C_1} - \frac{1}{2}\frac{Q_2^2}{C_2}\right) - \frac{1}{2}\frac{Q_0^2}{C_1}$$

soit :

$$\boxed{\Delta\mathcal{E} = -\frac{1}{2}\frac{C_2 Q_0^2}{C_1(C_1 + C_2)} < 0}$$

32. La loi des mailles nous conduit à l'équation :

$$\frac{q_1(t)}{C_1} = Ri(t) + \frac{q_2(t)}{C_2}$$

En dérivant par rapport au temps et compte tenu que $\dot{q}_2(t) = -\dot{q}_1(t) = i(t)$ on obtient :

$$\frac{di(t)}{dt} + \frac{C_1 + C_2}{RC_1C_2} i(t) = 0$$

Sachant qu'à l'instant initial $q_1(0) = Q_0$ et $q_2(0) = 0$ donc $i(0) = \frac{Q_0}{RC_1}$, l'équation précédente s'intègre en :

$$\boxed{i(t) = \frac{Q_0}{RC_1} \exp\left(-\frac{C_1 + C_2}{RC_1C_2} t\right) = I_0 \exp\left(-\frac{C_1 + C_2}{RC_1C_2} t\right)}$$

33. Évidemment on peut écrire $i(t) = I_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$ si on pose :

$$\boxed{\tau = \frac{RC_1C_2}{C_1 + C_2}}$$

34. L'énergie dissipée par effet Joule dans la résistance est :

$$\boxed{\mathcal{E}_J = \int_0^{+\infty} Ri^2(t)dt = \frac{\tau}{2R}\left(\frac{Q_0}{C_1}\right)^2 = \frac{C_2 Q_0^2}{2C_1(C_1 + C_2)}}$$

On observe évidemment que $\mathcal{E}_J = -\Delta\mathcal{E}$: la variation d'énergie électrostatique de l'ensemble des deux condensateurs est dissipée dans la résistance.

Circuits couplés par inductance.

35. La loi des mailles nous conduit à écrire, compte tenu que $i_k(t) = \dot{q}_k(t)$ (k = 1,2) :

$$\boxed{(L + L_0)\ddot{q}_1(t) + L_0\ddot{q}_2(t) + \frac{q_1(t)}{C} = 0 \quad , \quad (L + L_0)\ddot{q}_2(t) + L_0\ddot{q}_1(t) + \frac{q_2(t)}{C} = 0}$$

36. Ce système de deux oscillateurs étant symétrique, on peut introduire les coordonnées normales :

$$q_+(t) = \frac{1}{2}(q_1(t) + q_2(t)) \quad , \quad q_-(t) = \frac{1}{2}(q_1(t) - q_2(t))$$

Il en résulte le système différentiel :

$$(L + 2L_0)\ddot{q}_+(t) + \frac{q_+(t)}{C} = 0 \quad , \quad L\ddot{q}_-(t) + \frac{q_-(t)}{C} = 0$$

Ces équations différentielles admettent des solutions harmoniques dont les pulsations sont respectivement :

$$\boxed{\Omega_1 = \frac{1}{\sqrt{(L+2L_0)C}} \quad , \quad \Omega_2 = \frac{1}{\sqrt{LC}} > \Omega_1}$$

Ce sont les pulsations propres du système couplé.

37. Avec les conditions initiales $q_+(0) = q_-(0) = \frac{Q_0}{2}$ et $\dot{q}_+(0) = \dot{q}_-(0) = 0$, les solutions du système différentiel précédent sont :

$$q_+(t) = \frac{Q_0}{2}\cos(\Omega_1 t) \quad , \quad q_-(t) = \frac{Q_0}{2}\cos(\Omega_2 t)$$

On en déduit aisément :

$$\boxed{q_1(t) = \frac{Q_0}{2}\left[\cos(\Omega_1 t) + \cos(\Omega_2 t)\right]}$$

38. Puis :

$$\boxed{q_2(t) = \frac{Q_0}{2}\left[\cos(\Omega_1 t) - \cos(\Omega_2 t)\right]}$$

39. Si on veut exciter le mode propre de pulsation Ω_1 on doit avoir $q_-(t) = 0$ quel que soit t. Sachant que $q_1(0) = Q_0$ il faut imposer :

$$\boxed{q_2(0) = Q_{02} = Q_0}$$

Dans ce cas $i_1(t) = i_2(t)$ et le courant qui traverse la bobine B_0 est $i(t) = 2i_1(t) = 2i_2(t)$. On peut décomposer B_0 en deux bobines associées en parallèle, d'inductance propre $2L_0$, traversées chacune par le courant d'intensité $i(t)/2 = i_1(t) = i_2(t)$. Tout se passe comme si on avait deux circuits "LC série" identiques indépendants comprenant chacun en série L, C et $2L_0$. La pulsation propre commune à ces deux circuits vaut donc Ω_1.

40. De même, si on veut exciter le mode propre de pulsation Ω_2 on doit avoir $q_+(t) = 0$ quel que soit t. Sachant que $q_1(0) = Q_0$ il faut imposer :

$$\boxed{q_2(0) = Q'_{02} = -Q_0}$$

Dans ce cas $i_1(t) = -i_2(t)$. L'intensité du courant qui traverse la bobine B_0 est alors nulle à chaque instant et cette bobine est sans effet. Le circuit est alors équivalent à un circuit "LC série" d'inductance propre 2L et de capacité C/2 obtenues en associant les éléments jumeaux en série. Sa pulsation propre vaut donc Ω_2.