

# ICNA - SESSION 2005

## ÉPREUVE COMMUNE DE PHYSIQUE

### CORRIGÉ

#### Changement d'état.

1. On utilise la formule de Clapeyron.

La chaleur latente de fusion de l'eau à 273 K est :

$$L_f(T_f) = T_f (v_\ell - v_s) \left( \frac{dp}{dT} \right)_f = T_f \left( \frac{1}{\rho_\ell} - \frac{1}{\rho_s} \right) \left( \frac{dp}{dT} \right)_f = 335 \text{ kJ.kg}^{-1}$$

La vapeur d'eau étant assimilée à un gaz parfait, la chaleur de vaporisation de l'eau à 373 K est donc :

$$L_v(T_v) = T_v (v_g - v_\ell) \left( \frac{dp}{dT} \right)_v = T_v \left( \frac{RT_v}{p_s M} - \frac{1}{\rho_\ell} \right) \left( \frac{dp}{dT} \right)_v = 2,28.10^3 \text{ kJ.kg}^{-1}$$

2. La transformation s'effectue à pression constante ; la quantité de chaleur reçue par l'eau au cours de cette transformation est alors égale à la variation d'enthalpie, soit :

$$Q = \Delta H = m [c_s (T_f - T_0) + L_f (T_f) + c_\ell (T_v - T_f) + x_B L_v (T_v)] = 509,4 \text{ kJ}$$

3. L'équation d'une isentropique pour un mélange liquide/vapeur est :

$$c_\ell \ln T + \frac{x L_v(T)}{T} = \text{Cte}$$

Les états B (*mélange liquide/vapeur*) et C (*liquide sur la courbe d'ébullition*) appartenant à la même isentropique on en déduit :

$$T_C = T_B \exp \left( \frac{x_B L_v(T_B)}{c_\ell T_B} \right) > T_C$$

**Remarque.** On peut aussi envisager l'évolution fictive BB'C.

Le passage de B à B' correspond à la condensation d'une masse  $m x$  de vapeur d'eau à la température  $T_B$  ; il en résulte une variation d'entropie :  $S_{B'} - S_B = -m x \frac{L_v(T_B)}{T_B}$ .

Les états B' et C correspondant à une phase liquide pure on peut utiliser l'expression approchée de la variation d'entropie d'une phase incompressible, soit :  $S_C - S_{B'} = m c_\ell \ln \left( \frac{T_C}{T_B} \right)$ .

Il suffit alors d'écrire la condition  $S_C = S_B$  qui traduit le caractère isentropique de l'évolution envisagée.

4. Le réseau d'isothermes d'Andrews montre, sur la courbe de saturation, que si  $T_C > T_B$  alors  $p_C > p_B = p_{\text{ref}}$  : la transformation BC est une compression isentropique.

Pour déterminer  $p_C$  on se place sur la courbe  $p = f(T)$ . Compte tenu des hypothèses adoptées la formule de Clapeyron s'écrit :

$$\frac{dp}{dT} \approx \frac{L_v(T)}{v_g T} = \frac{p M_e}{R} \frac{a + bT}{T^2}$$

soit encore :

$$\frac{dp}{p} = \left( \frac{a M_e}{R T^2} + \frac{b M_e}{R T} \right) dT$$

On en déduit par intégration :

$$p_C = p_{\text{ref}} \left( \frac{T_C}{T_B} \right)^{\frac{bM_e}{R}} \exp \left[ \frac{aM_e}{R} \left( \frac{1}{T_B} - \frac{1}{T_C} \right) \right]$$

5. La transformation BC étant isentropique le premier principe de la thermodynamique nous conduit à :

$$W_{BC} = U_C - U_B$$

Si on néglige le volume massique de la phase liquide devant celui de la vapeur, l'énergie interne d'un mélange liquide/vapeur s'écrit, à une constante près :

$$U \approx mc_\ell T + mx \left( L_v(T) - pv_g \right) = mc_\ell T + mx \left( L_v(T) - \frac{RT}{M_e} \right)$$

On en déduit alors aisément :

$$W_{BC} = m \left[ \frac{x_B RT_B}{M_e} - x_B L_v(T_B) + c_\ell (T_C - T_B) \right]$$

### Transformations d'un gaz parfait.

6. Le gaz parfait subit une compression isentropique. Le premier principe de la thermodynamique et la première loi de Joule nous conduisent alors à :

$$W_{12} = \frac{mR}{M_g(\gamma-1)} (T_2 - T_1)$$

Par ailleurs la loi de Laplace  $T^\gamma p^{1-\gamma} = \text{Cte}$  nous donne  $\frac{T_2}{T_1} = \left( \frac{p_1}{p_2} \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = \left( \frac{\mu}{\mu + M} \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}$ . Il en résulte que :

$$W_{12} = \frac{mRT_1}{M_g(\gamma-1)} \left( \left( \frac{\mu}{\mu + M} \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} - 1 \right) = \frac{p_1 V_1}{(\gamma-1)} \left( \left( \frac{\mu}{\mu + M} \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} - 1 \right)$$

Ce résultat peut être obtenu par un calcul direct soit :  $W_{12} = -\int_1^2 p dV = -p_1 V_1^\gamma \int_1^2 V^{-\gamma} dV$ .

7. A partir de l'état d'équilibre (2) le gaz parfait, par un refroidissement isobare, atteint l'état d'équilibre (3). Cet état est caractérisé par :

$$p_3 = p_2, \quad T_3 = T_{\text{atm}}, \quad V_3 = V_2 \frac{T_3}{T_2}$$

D'autre part cette évolution s'accompagne d'une variation d'entropie :

$$\Delta S_{23} = S_3 - S_2 = mc_p \int_2^3 \frac{dT}{T} = \frac{mR\gamma}{M_g(\gamma-1)} \ln \left( \frac{T_3}{T_2} \right) < 0$$

8. La quantité de chaleur reçue par le gaz au cours de cette évolution isobare est égale à la variation d'enthalpie, soit d'après la deuxième loi de Joule :

$$Q_{23} = \Delta H_{23} = \frac{mR\gamma}{M_g(\gamma-1)} (T_3 - T_2) < 0$$

Le travail reçu par le gaz au cours de cette transformation isobare, compte tenu de  $p_2 = p_3$ , est :

$$W_{23} = p_2 V_2 - p_3 V_3 = \frac{mR}{M_g} (T_2 - T_3) > 0$$

On peut aussi déterminer ce travail avec le premier principe de la thermodynamique et la première loi de Joule soit :

$$W_{23} = \Delta U_{23} - Q_{23} = \frac{mR}{M_g(\gamma-1)} (T_3 - T_2) - Q_{23} = \frac{mR}{M_g} (T_2 - T_3)$$

**Remarque.** L'entropie reçue par le gaz au cours de cette transformation est :

$$S_{23}^r = \frac{Q_{23}}{T_3} = \frac{mR\gamma}{M_g(\gamma-1)} \left( 1 - \frac{T_2}{T_3} \right)$$

Il en résulte une entropie créée :

$$S_{23}^p = \Delta S_{23} - S_{23}^r = \frac{mR\gamma}{M_g(\gamma-1)} \left( \frac{T_2}{T_3} - 1 - \ln \left( \frac{T_2}{T_3} \right) \right) > 0$$

Ce résultat est conforme au cas d'une transformation irréversible.

**9.** On fait subir au gaz une compression adiabatique irréversible. La première loi de Joule et le premier principe de la thermodynamique nous conduisent à écrire :

$$\Delta U_{14} = \frac{mR}{M_g(\gamma-1)} (T_4 - T_1) = W_{14} = -p_4 (V_4 - V_1) = \frac{mR}{M_g} \left( \frac{M+\mu}{\mu} T_1 - T_4 \right)$$

On en déduit la température  $T_4$ , soit :

$$\left[ T_4 = \frac{T_1}{\gamma} \left[ (\gamma-1) \frac{M+\mu}{\mu} + 1 \right] = T_1 \left[ 1 + (\gamma-1) \frac{M}{\gamma\mu} \right] > T_1 \right.$$

**10.** On calcule la variation d'entropie le long d'un chemin réversible entre les mêmes états extrêmes (1) et (4). On obtient ainsi :

$$\left[ \Delta S_{14} = \frac{mR}{M_g} \left[ \frac{\gamma}{\gamma-1} \ln \left( \frac{T_4}{T_1} \right) - \ln \left( \frac{M+\mu}{\mu} \right) \right] \right.$$

Notons que la transformation étant adiabatique, la variation d'entropie du gaz parfait est égale à l'entropie créée.

### Électrostatique : sphère uniformément chargée.

**11.** La charge  $Q$  est répartie de manière uniforme, dans le volume sphérique de centre  $O$  et de rayon  $R$ , avec une densité  $\rho = \frac{3Q}{4\pi R^3}$ .

Toute rotation autour d'un axe passant par le centre  $O$  laisse la distribution de charge invariante donc  $\mathbf{E}(P) = \mathbf{E}(r)$  où  $r$  est la distance de  $O$  au point  $P$  considéré. D'autre part, tout plan contenant  $O$  est plan de symétrie pour la distribution de charge ;  $\mathbf{E}$ , vecteur vrai, appartenant à tous ces plans est radial, soit :

$$\mathbf{E}(P) = E(r) \frac{\mathbf{OP}}{\|\mathbf{OP}\|} = E(r) \mathbf{e}_r .$$

Pour déterminer  $E(r)$  on peut appliquer la théorème de Gauss sur une surface sphérique  $\Sigma$  de centre  $O$  et de rayon  $r$ . Ainsi il vient :

$$4\pi r^2 E(r) = \begin{cases} \frac{Q}{\epsilon_0} & \text{si } r > R \\ \frac{Q}{\epsilon_0} \left( \frac{r}{R} \right)^3 & \text{si } r < R \end{cases}$$

On déduit :

$$\left[ \mathbf{E}(P) = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{u}_r & \text{si } r > R \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^3} r \mathbf{u}_r & \text{si } r < R \end{cases} \right.$$

**12.** L'énergie électrostatique associée à cette distribution de charge est définie par  $W = \iiint \frac{\epsilon_0}{2} \mathbf{E}^2 dV$ , ce qui nous conduit à :

$$W = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \left[ \int_0^R \frac{r^4}{R^6} dr + \int_R^{+\infty} \frac{dr}{r^2} \right] = \frac{3Q^2}{20\pi\epsilon_0 R}$$

13. Le travail dépensé par l'opérateur est égal à l'opposé du travail de la force électrique donc à la variation d'énergie potentielle. Cette dernière étant prise nulle à l'infini il en résulte que :

$$W_{op} = W = \frac{3Q^2}{20\pi\epsilon_0 R} = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 r_1} = \Delta E_p$$

On en déduit :

$$r_1 = \frac{5R}{3}$$

### Magnétostatique et induction électromagnétique.

14. Toute rotation autour de l'axe z'z et toute translation parallèlement à cet axe laisse la distribution de courant, de densité volumique uniforme  $\mathbf{j} = \frac{I}{\pi R^2} \mathbf{e}_z$ , invariante ; le champ magnétique qu'elle engendre est donc tel que  $\mathbf{B}(M) = \mathbf{B}(\rho)$  où  $\rho$  est la distance de l'axe au point M considéré.

Par ailleurs tout plan contenant l'axe z'z est plan de symétrie pour cette distribution de courant ;  $\mathbf{B}$ , pseudo-vecteur, est orthogonal à tous ces plans, donc orthoradial, soit  $\mathbf{B}(M) = B(\rho) \mathbf{e}_\theta$ .

On détermine  $B(\rho)$ , à l'intérieur du conducteur, en appliquant le théorème d'Ampère sur un contour circulaire  $\Gamma$  d'axe z'z et de rayon  $\rho < R$ . Il vient :

$$2\pi\rho B(\rho) = \mu_0 \frac{\rho^2}{R^2} I$$

d'où on déduit :

$$\mathbf{B}(M) = B(\rho < R) \mathbf{e}_\theta = \frac{\mu_0 I}{2\pi R^2} \rho \mathbf{e}_\theta$$

15. Les mêmes propriétés de symétrie que précédemment nous autorisent à prendre un potentiel-vecteur de la forme  $\mathbf{A}(M) = A(\rho) \mathbf{e}_z$ . Le théorème de Stokes nous conduit alors à écrire :

$$\iint_S (\nabla \wedge \mathbf{A}) \cdot (d\mathbf{S}\mathbf{n}) = \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \iint_S \mathbf{B} \cdot (d\mathbf{S}\mathbf{n})$$

$C$  est un contour rectangulaire de hauteur unité, de largeur  $\rho < R$ , s'appuyant sur l'axe z'z et  $S$  la surface ouverte qui s'appuie sur ce contour. Il en résulte que :

$$A(0) - A(\rho) = \frac{\mu_0 I}{2\pi R^2} \int_0^\rho \rho' d\rho' = \frac{\mu_0 I \rho^2}{4\pi R^2}$$

L'origine du potentiel-vecteur étant prise sur l'axe z'z on obtient :

$$\mathbf{A}(M) = A(\rho < R) \mathbf{e}_z = -\frac{\mu_0 I \rho^2}{4\pi R^2} \mathbf{e}_z$$

16. Le champ électrique induit par les variations temporelles du champ magnétique est le champ de Neumann, soit :

$$\mathbf{E}_i(M) = -\frac{\partial \mathbf{A}(M)}{\partial t} = -\frac{\mu_0 I_0 \omega \rho^2}{4\pi R^2} \sin(\omega t) \mathbf{e}_z$$

### Superposition d'ondes électromagnétiques.

17. L'onde (1) a pour vecteur d'onde  $\mathbf{k}_1 = k\mathbf{e}_1 = k(\cos\theta \mathbf{e}_x + \sin\theta \mathbf{e}_y)$  alors que pour l'onde (2) on a  $\mathbf{k}_2 = k\mathbf{e}_2 = k(\cos\theta \mathbf{e}_x - \sin\theta \mathbf{e}_y)$ . On en déduit les champs électriques associés à ces ondes :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_1(M, t) &= E_0 \cos[\omega t - \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{OM}] \mathbf{e}_z = E_0 \cos[\omega t - k(x \cos \theta + y \sin \theta)] \mathbf{e}_z \\ \mathbf{E}_2(M, t) &= E_0 \cos[\omega t - \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{OM}] \mathbf{e}_z = E_0 \cos[\omega t - k(x \cos \theta - y \sin \theta)] \mathbf{e}_z \end{aligned}$$

18. Le champ électrique résultant de la superposition de ces deux ondes est :

$$\mathbf{E}(M, t) = \mathbf{E}_1(M, t) + \mathbf{E}_2(M, t) = 2E_0 \cos(ky \sin \theta) \cos(\omega t - kx \cos \theta) \mathbf{e}_z$$

Ce champ électrique présente les caractéristiques suivantes :

♦ il est monochromatique et polarisé rectilignement selon  $\mathbf{e}_z$  ;

♦ il se propage dans le sens des  $x$  croissants avec une vitesse de phase  $v_\phi = \frac{\omega}{k \cos \theta} = \frac{c}{\cos \theta} \geq c$  si la propagation s'effectue dans le vide ;

♦ son amplitude varie suivant  $Oy$ , avec une période spatiale  $y_0 = \frac{2\pi}{k \sin \theta} = \frac{\lambda}{\sin \theta}$ , donc il n'est plus uniforme dans un plan d'onde.

L'onde résultante n'est pas plane : elle est stationnaire suivant  $Oy$  et progressive suivant  $Ox$ .

19. Dans le cas particulier où  $\theta = 0$  on obtient :

$$\mathbf{E}(M, t) = 2E_0 \cos(\omega t - kx) \mathbf{e}_z$$

On est en présence d'une onde plane progressive harmonique, polarisée rectilignement suivant  $\mathbf{e}_z$ , se propageant à la célérité  $\omega/k$  dans le sens des  $x$  croissants.

**Remarque.** Cette question n'a aucun intérêt.

20. Le champ magnétique associé au champ électrique résultant s'obtient par l'équation de Maxwell-Faraday,  $\nabla \wedge \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ . En l'absence de tout champ statique il vient :

$$\mathbf{B}(M, t) = \begin{cases} B_x = 2E_0 \frac{k}{\omega} \sin \theta \sin(ky \sin \theta) \sin(\omega t - kx \cos \theta) \\ B_y = -2E_0 \frac{k}{\omega} \cos \theta \cos(ky \sin \theta) \cos(\omega t - kx \cos \theta) \\ B_z = 0 \end{cases}$$

Si  $\theta = 0$  alors on obtient  $\mathbf{B}(M, t) = -2E_0 \frac{k}{\omega} \cos(\omega t - kx) \mathbf{e}_y$ . Compte tenu du résultat de la question 19 on peut conclure que l'onde résultante est plane progressive sinusoïdale.

Si  $\theta = \frac{\pi}{2}$  alors  $\mathbf{B}(M, t) = 2E_0 \frac{k}{\omega} \sin(ky) \sin(\omega t) \mathbf{e}_x$  et  $\mathbf{E}(M, t) = 2E_0 \cos(ky) \cos(\omega t) \mathbf{e}_z$  : on est en présence d'une onde stationnaire.

Si  $\theta = \frac{\pi}{4}$  alors  $\mathbf{B}(M, t) = \sqrt{2}E_0 \frac{k}{\omega} \left[ \sin\left(\frac{ky}{\sqrt{2}}\right) \sin\left(\omega t - \frac{kx}{\sqrt{2}}\right) \mathbf{e}_x - \cos\left(\frac{ky}{\sqrt{2}}\right) \cos\left(\omega t - \frac{kx}{\sqrt{2}}\right) \mathbf{e}_y \right]$  ; par ailleurs  $\mathbf{E}(M, t) = 2E_0 \cos\left(\frac{ky}{\sqrt{2}}\right) \cos\left(\omega t - \frac{kx}{\sqrt{2}}\right) \mathbf{e}_z$ . On peut montrer que, dans ce cas, on a des franges d'interférence dans les plans  $x = Cte$ .

### Optique géométrique : le prisme.

21. Les relations fondamentales du prisme sont :

$$\boxed{\sin i = n \sin r \quad , \quad \sin i' = n \sin r' \quad , \quad A = r + r' \quad , \quad D = i + i' - A}$$

22. L'indice de réfraction d'un verre (*ici un flint moyen*) est une fonction décroissante de la longueur d'onde et peut être représenté dans le spectre visible par la formule de Cauchy :  $n^2(\lambda) = A + \frac{B}{\lambda^2} + \dots$ , où  $A$  et  $B$  sont des constantes,  $\lambda$  la longueur d'onde dans le vide. Il en résulte que le prisme est un milieu

**dispersif** : éclairé par une lampe à vapeur de mercure - lumière polychromatique - il va donner un faisceau transmis coloré.

Par ailleurs, la déviation de la lumière par un prisme - pour  $A$  et  $i$  fixés - est une fonction croissante de l'indice : les radiations de courte longueur d'onde (*violette*) sont plus déviées que les radiations de grande longueur d'onde (*rouge*).

**23.** Un rayon incident venant d'un milieu moins réfringent pénètre toujours dans le prisme ; il est réfracté puis tombe sur la seconde face du prisme sous l'incidence  $r' = A - r$ . Pour que ce rayon émerge, donc que  $D$  soit mesurable, il faut que  $|r'| \leq \ell = \arcsin\left(\frac{1}{n}\right) = 38,11^\circ$ . Compte tenu de  $A = 60^\circ < 2\ell$ , la condition d'émergence se traduit par :

$$i_0 = \arcsin(n \sin(A - \ell)) = 37,15^\circ \leq i \leq 90^\circ$$

Le principe du retour inverse de la lumière entraîne :

$$i'_0 = 37,15^\circ \leq i' \leq 90^\circ$$

**24.** On montre que, pour  $A$  et  $n$  fixés, la déviation  $D$  passe, pour  $i \in \left[i_0, \frac{\pi}{2}\right]$ , par un extremum qui est un minimum  $D_m$  tel que :

$$D_m = 2i_m - A = 2 \arcsin\left(n \sin\left(\frac{A}{2}\right)\right) - A = 48,2^\circ$$

**25.** On a  $n = \frac{\sin\left(\frac{A + D_m}{2}\right)}{\sin\left(\frac{A}{2}\right)}$ . En prenant les différentielles logarithmiques il vient :

$$\frac{dn}{n} = \frac{\cos\left(\frac{A + D_m}{2}\right)}{\sin\left(\frac{A + D_m}{2}\right)} d\left(\frac{A + D_m}{2}\right) - \frac{\cos\left(\frac{A}{2}\right)}{\sin\left(\frac{A}{2}\right)} d\left(\frac{A}{2}\right)$$

Quand on passe aux incertitudes on obtient :

$$\frac{\Delta n}{n} = \left| \frac{1}{\tan\left(\frac{A + D_m}{2}\right)} - \frac{1}{\tan\left(\frac{A}{2}\right)} \right| \Delta\left(\frac{A}{2}\right) + \frac{\Delta\left(\frac{D_m}{2}\right)}{\left| \tan\left(\frac{A + D_m}{2}\right) \right|}$$

soit encore, compte tenu de  $0 < \frac{A}{2} < \frac{A + D_m}{2}$  :

$$\frac{\Delta n}{n} = \left( \frac{1}{\tan\left(\frac{A}{2}\right)} - \frac{1}{\tan\left(\frac{A + D_m}{2}\right)} \right) \Delta\left(\frac{A}{2}\right) + \frac{1}{\tan\left(\frac{A + D_m}{2}\right)} \Delta\left(\frac{D_m}{2}\right)$$

On suppose que  $\Delta A = \Delta D_m = 1' \approx 3 \cdot 10^{-4}$  rad ce qui nous conduit à :

$$\Delta n = \frac{n}{2 \tan\left(\frac{A}{2}\right)} \Delta A \approx 4 \cdot 10^{-4}$$

### Dynamique du point matériel en référentiel non galiléen.

**26.** Dans  $\mathcal{R}$ , référentiel non galiléen lié à la tige  $\mathcal{T}$  en rotation à la vitesse angulaire constante  $\omega$  autour de l'axe Oz fixe dans  $\mathcal{R}_0$ , le point matériel M est soumis :

- ♦ à son poids  $\mathbf{P} = m\mathbf{g} = -m\mathbf{g}\mathbf{e}_z$  ;
- ♦ à la réaction  $\mathbf{R}$  du support telle que  $\mathbf{R}\cdot\mathbf{e}_x = 0$  car le déplacement sur la tige s'effectue sans frottement ;
- ♦ à la force d'inertie d'entraînement  $\mathbf{F}_{ie} = -m\boldsymbol{\omega}(\mathcal{R}/\mathcal{R}_0) \wedge (\boldsymbol{\omega}(\mathcal{R}/\mathcal{R}_0) \wedge \mathbf{OM}) = m\omega^2\rho\mathbf{e}_x$  ;
- ♦ la force d'inertie de Coriolis  $\mathbf{F}_{ic} = -2m\boldsymbol{\omega}(\mathcal{R}/\mathcal{R}_0) \wedge \mathbf{v}(M/\mathcal{R}) = -2m\omega\dot{\rho}\mathbf{e}_y$ .

Le principe fondamental de la dynamique appliqué à M dans  $\mathcal{R}$  conduit alors à écrire :

$$\boxed{m\mathbf{a}(M/\mathcal{R}) = \mathbf{P} + \mathbf{R} + \mathbf{F}_{ie} + \mathbf{F}_{ic}}$$

avec  $\mathbf{a}(M/\mathcal{R}) = \ddot{\rho}\mathbf{e}_x$ .

**27.** En projection suivant  $\mathbf{e}_x$  la relation vectorielle précédente nous donne l'équation du mouvement de M dans  $\mathcal{R}$ , soit :

$$\frac{d^2\rho(t)}{dt^2} = \omega^2\rho(t)$$

Cette équation différentielle admet une solution générale de la forme :

$$\rho(t) = A\text{ch}(\omega t) + B\text{sh}(\omega t)$$

On détermine les valeurs des constantes A et B à l'aide des conditions initiales  $\rho(0) = 0$  et  $\dot{\rho}(0) = v_0$  ; on

en déduit  $A = 0$  et  $B = \frac{v_0}{\omega}$ , d'où l'équation horaire du mouvement :

$$\boxed{\rho(t) = \frac{v_0}{\omega}\text{sh}(\omega t)}$$

La réaction de la tige sur la masselotte est alors :

$$\mathbf{R} = 2mv_0\text{ch}(\omega t)\mathbf{e}_y + m\mathbf{g}\mathbf{e}_z$$

**28.** Le théorème de composition des vitesses se traduit par :

$$\mathbf{v}(M/\mathcal{R}_0) = \mathbf{v}(M/\mathcal{R}) + \mathbf{v}(M, \mathcal{R}/\mathcal{R}_0) = \dot{\rho}(t)\mathbf{e}_x + \boldsymbol{\omega}(\mathcal{R}/\mathcal{R}_0) \wedge \mathbf{OM} = \dot{\rho}(t)\mathbf{e}_x + \omega\rho(t)\mathbf{e}_y$$

soit en utilisant l'équation horaire obtenue à la question précédente :

$$\boxed{\mathbf{v}(M/\mathcal{R}_0) = \mathbf{v}(M/\mathcal{R}) + \mathbf{v}(M, \mathcal{R}/\mathcal{R}_0) = v_0(\text{ch}(\omega t)\mathbf{e}_x + \text{sh}(\omega t)\mathbf{e}_y)}$$

**29.** La tige tourne à la vitesse angulaire  $\omega = \pi/8 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$ . Le point matériel M, lancé de O à la vitesse  $v_0 = 0,393\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ , atteint la butée  $\mathbf{B}$ , située à la distance D de O, à l'instant  $t_0$  tel que :

$$\boxed{t_0 = \frac{1}{\omega} \text{Arg sh} \left( \frac{\omega D}{v_0} \right) \approx 4\text{s}}$$

**30.** Dans  $\mathcal{R}$ , M décrit le segment de droite [OB] porté par Ox pour  $t \in [0, t_0]$  puis reste immobile contre  $\mathbf{B}$  pour  $t > t_0$ .

Dans  $\mathcal{R}_0$ , M décrit une spirale d'équation polaire  $\rho = \frac{v_0}{\omega}\text{sh}(\theta)$  (avec  $\theta = \omega t$ ) pour  $t \in [0, t_0]$ , puis un cercle de centre O et de rayon D pour  $t > t_0$ .

**31.** L'équilibre relatif - équilibre dans  $\mathcal{R}$  - de la masselotte M contre la butée  $\mathbf{B}$  se traduit par :

$$\mathbf{P} + \mathbf{R} + \mathbf{R}_B + (\mathbf{F}_{ie})_{\rho=D} = \mathbf{0}$$

Sachant que la réaction de la tige compense le poids de la masselotte (*pas de frottements*) il en résulte que la réaction de la butée est telle que :

$$\boxed{\mathbf{R}_B = -(\mathbf{F}_{ie})_{\rho=D} = -m\omega^2 D\mathbf{e}_x}$$

## Électrocinétique : régime harmonique.

32. Les A.O. sont supposés idéaux ( $i_+ = i_- = 0$ ) et en régime linéaire ( $v_+ = v_-$ ); on peut donc écrire :

$$i_s = \frac{u_e - u_s}{R_3} + \frac{-u_1 - u_s}{R_2}$$

D'autre part le théorème de Millman appliqué à l'entrée inverseuse du premier A.O. nous donne :

$$\frac{u_1}{R_1} = \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} \right) u_e - \frac{u_s}{R_3}$$

Par élimination de  $u_1$  entre les deux relations précédentes il vient :

$$i_s = \frac{R_2 - R_3 - R_1}{R_2 R_3} u_e + \frac{R_1 - R_2 - R_3}{R_2 R_3} u_s$$

La sortie étant en court-circuit, soit  $u_s = 0$ , il en résulte que :

$$(i_s)_{cc} = \frac{u_e}{R_3} - \frac{u_1}{R_2} = \frac{R_2 - R_3 - R_1}{R_2 R_3} u_e$$

33. Le circuit étant ouvert en sortie on a  $i_s = 0$  qui nous conduit à :

$$(u_s)_o = \frac{R_2 u_e - R_3 u_1}{R_2 + R_3} = \frac{R_2 - R_3 - R_1}{R_2 + R_3 - R_1} u_e$$

34. Par définition, le courant électromoteur  $i_N$  du générateur de Norton équivalent au montage vu des bornes S et M est égal au courant de sortie en court-circuit de ce montage soit :

$$i_N = (i_s)_{cc} = \frac{R_2 - R_3 - R_1}{R_2 R_3} u_e$$

D'autre part, la tension en circuit ouvert en sortie du montage n°1 représente la tension  $u_N$  aux bornes de la conductance  $G_N$ , du générateur de Norton équivalent au montage vu des bornes S et M, lorsqu'elle est traversée par le courant électromoteur. Il en résulte que :

$$G_N = \frac{i_N}{u_N} = \frac{(i_s)_{cc}}{(u_s)_o} = \frac{R_2 + R_3 - R_1}{R_2 R_3}$$

35. L'impédance complexe du montage n°2 est :

$$\underline{Z} = |\underline{Z}| \exp(j\varphi) = R_4 + \frac{R_5}{1 + j\omega CR_5} = R_4 + \frac{R_5(1 - j\omega CR_5)}{1 + (\omega CR_5)^2} = (6 - 5j) \cdot 10^3$$

On en déduit aisément :

$$|\underline{Z}| = \sqrt{61} \cdot 10^3 \Omega = 7,81 \text{ k}\Omega$$

Par ailleurs l'argument de l'impédance est égal au déphasage de l'intensité par rapport à la tension (avec cette définition le déphasage  $\varphi$  est un retard), soit :

$$\tan \varphi = \frac{\Im\{\underline{Z}\}}{\Re\{\underline{Z}\}} = \frac{-CR_5^2 \omega}{R_5 + R_4(1 + (CR_5 \omega)^2)} = -\frac{5}{6} \Rightarrow \varphi = -39,8^\circ \approx -0,695 \text{ rad}$$

Ce résultat nous montre que l'intensité est en avance sur la tension.

36. La puissance moyenne (ou puissance active) consommée par le dipôle AB est :

$$\mathcal{P}_{AB} = \frac{1}{2} \Re\{u_2(t) \cdot i(t)^*\} = \frac{\Re\{\underline{Z}\}}{|\underline{Z}|^2} U_{2,\text{eff}}^2 = 984 \text{ mW}$$

Celle consommée dans la résistance  $R_4$  est :

$$(\mathcal{P}_R)_4 = \frac{1}{2} \Re\{u_4(t) \cdot i(t)^*\} = \frac{1}{2} \Re\left\{ \frac{R_4}{\underline{Z}} u_2(t) \cdot i(t)^* \right\} = \frac{R_4}{|\underline{Z}|^2} U_{2,\text{eff}}^2 = 164 \text{ mW}$$

Celle consommée dans le condensateur est nulle :



$$\boxed{\mathcal{P}_C = 0}$$

Enfin, le **théorème de Boucherot** nous permet alors d'obtenir la puissance moyenne consommée dans la résistance  $R_5$  :

$$\boxed{(\mathcal{P}_R)_5 = \mathcal{P}_R - (\mathcal{P}_R)_4 = 820\text{mW}}$$

**37.** Le montage n°1 se comportera comme une source idéale de courant si  $G_N = 0$  soit pour :

$$\boxed{R_1 = R_2 + R_3}$$

Dans ce cas le courant électromoteur débité vaut :

$$\boxed{i_N = -\frac{2}{R_2} u_e}$$

On a une source de courant commandée par une tension.

**38.** Le montage n°2 est alors alimenté par un échelon de courant  $i(t) = -\frac{2E}{R_2} Y(t)$  où  $Y(t)$ , fonction

échelon unité de Heaviside, est telle que  $Y(t) = \begin{cases} 1 & \text{pour } t \geq 0 \\ 0 & \text{pour } t < 0 \end{cases}$ .

A l'aide de l'expression de l'impédance complexe déterminée à la question 35 on peut écrire l'équation différentielle liant  $u_2(t) = u_s(t)$  avec  $i(t)$ , soit :

$$R_5 C \frac{du_2(t)}{dt} + u_2(t) = (R_4 + R_5) i(t) + R_4 R_5 C \frac{di(t)}{dt}$$

Pour  $t \geq 0$  il vient :

$$R_5 C \frac{du_2(t)}{dt} + u_2(t) = -2 \frac{(R_4 + R_5)}{R_2} E$$

Sachant qu'à l'instant  $t = 0$ , le condensateur étant non chargé, on a  $u_2(0) = -2 \frac{R_4}{R_5} E$ , l'équation

différentielle précédente s'intègre en :

$$\boxed{u_2(t) = -2 \frac{(R_4 + R_5)}{R_2} E + 2 \frac{R_5}{R_4} E \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) = -2(11 - 10 \exp(-t))}$$

si on pose  $\tau = CR_5 = 1\text{ms}$ , constante de temps du régime transitoire, et si on exprime  $t$  en ms. Le régime permanent est atteint au bout de quelques  $\tau$ .

### Diffraction par une fente.

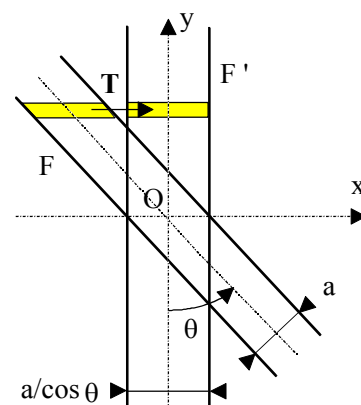
**39.** Chaque composante monochromatique de la lumière blanche donne sa propre figure de diffraction. Or, ces différentes composantes monochromatiques étant incohérentes entre elles, les éclaircissements, dans le plan focal image de la lentille convergente, s'ajoutent. On observe ainsi :

- ◆ une frange centrale blanche très large irisée de rouge (*largeur proportionnelle à  $\lambda$* ) ;
  - ◆ des franges colorées de part et d'autre de cette frange blanche.
- Toutes ces franges sont parallèles à la direction de la fente source.

**40.** Après une rotation  $\theta$ , la fente diffractante est dans la position représentée ci-contre.

Nous savons qu'une translation de la fente diffractante dans son plan ne modifie pas la figure de diffraction ; il est donc possible de remplacer  $F$  par  $F'$ , obtenue en traduisant chaque élément de  $F$  d'un vecteur :  $\mathbf{T} = y \tan \theta \mathbf{e}_x$ . Le problème étant à une seule dimension - car  $b \gg a$  - on peut prendre pour transparence pupillaire :

$$t(x) = \Pi\left(\frac{x}{a} \cos \theta\right) = \begin{cases} 1 & \text{pour } |x| \leq a/2 \cos \theta \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$



Sur l'écran, la raie présentant un maximum d'intensité a alors une largeur  $2 \frac{\lambda f'}{a} \cos \theta$ . Elle est de couleur verte car  $\lambda = 546 \text{ nm}$  correspond à la raie verte du mercure.  
Dans cette situation la longueur b de la pupille n'intervient pas dans la répartition d'éclairement de l'écran.