ICNA - SESSION 2005
ÉPREUVE OPTIONNELLE DE PHYSIQUE
CORRIGÉ

Courant dans le vide.

1. Dans l'espace inter-électrode le potentiel obéit à l'équation de Poisson :

$$\Delta V(r) = -\frac{\rho(r)}{\varepsilon_0}$$

soit en coordonnées cylindriques :

$$\boxed{\frac{d^2V(r)}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dV(r)}{dr} + \frac{\rho(r)}{\varepsilon_0} = 0}$$

2. On néglige le poids de l'électron devant la force électrique. Par ailleurs, en l'absence de toute force de frottement, l'énergie mécanique de l'électron se conserve au cours de son mouvement. Il en résulte, pour des électrons non relativistes et compte tenu des conditions initiales, que :

$$\frac{1}{2}mv^2 - eV(r) = 0$$

On en déduit la vitesse d'un électron à la distance r de la cathode :

$$\boxed{v(r) = \sqrt{\frac{2e}{m}V(r)}}$$

3. L'intensité du courant I(r) qui traverse la surface cylindrique d'axe Oz, de rayon r et de hauteur h, est égale au flux du vecteur densité de courant, $\mathbf{j}(r) = \rho(r)v(r)\mathbf{e}_r$,à travers cette surface :

$$I(r) = \iint_S \mathbf{j}(r).(-dS\,\mathbf{e}_r) = -r\,\rho(r)v(r)\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^h dz$$

soit :

$$\boxed{I(r) = -2\pi\,h\,r\,\rho(r)v(r)}$$

4. De la relation précédente et compte tenu de l'expression de v(r) on déduit :

$$\rho(r) = -\frac{I(r)}{2\pi r h\, v(r)} = -\frac{I(r)}{2\pi r h}\sqrt{\frac{m}{2e}}(V(r))^{-1/2}$$

En reportant dans l'équation de Poisson il vient :

$$r\frac{d^2V(r)}{dr^2} + \frac{dV(r)}{dr} = \frac{I(r)}{2\pi\varepsilon_0 h}\sqrt{\frac{m}{2e}}(V(r))^{-1/2}$$

En rapprochant cette expression de celle proposée dans l'énoncé on obtient :

$$\boxed{K = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0 h}\sqrt{\frac{m}{2e}}}$$

5. En régime stationnaire I = Cte et le potentiel V(r) obéit à l'équation différentielle :

$$r\frac{d^2V(r)}{dr^2} + \frac{dV(r)}{dr} = KI\,(V(r))^{-1/2}$$

On cherche des solutions de la forme $V(r) = Ar^\alpha$ ce qui nous conduit à :

$$\left(\alpha^2 - \frac{KI}{A^{3/2}}r^{1-\frac{3}{2}\alpha}\right)A\,r^{\alpha-1} = 0$$

Cette relation ne peut être vérifiée pour toute valeur de r que si le terme entre parenthèses est indépendant de r et nul, condition réalisée pour :

$$\boxed{\alpha = \frac{2}{3}}$$

6. On a respectivement $A^{3/2} = \frac{9}{4}KI$ et $V_A = V(R) = AR^{2/3}$. On en déduit par élimination de la constante A :

$$I = \frac{4}{9KR}V_A^{3/2} = CV_A^{3/2}$$

si on pose :

$$\boxed{C = \frac{4}{9KR} = \frac{8\pi\varepsilon_0 h}{9R}\sqrt{\frac{2e}{m}}}$$

Potentiel écranté.

7. Dans le cas où V(r) << V_0, la densité volumique totale correspondant aux deux distributions diffuses est, au premier ordre en $V(r)/V_0$:

$$\boxed{\rho(r) = \rho_+(r) + \rho_-(r) \approx -2\rho_0\frac{V(r)}{V_0}}$$

8. Le potentiel V(r) obéit à l'équation de Poisson, soit en coordonnées sphériques :

$$\frac{d^2(r\,V(r))}{dr^2} = \frac{2\rho_0}{\varepsilon_0}\frac{r\,V(r)}{V_0} = \frac{r\,V(r)}{r_0^2}$$

si on pose :

$$\boxed{r_0^2 = \frac{\varepsilon_0 V_0}{2\rho_0}}$$

où r_0 est homogène à une longueur.

9. Cette équation différentielle admet une solution générale de la forme :

$$V(r) = \frac{A}{r}\exp\left(-\frac{r}{r_0}\right) + \frac{B}{r}\exp\left(\frac{r}{r_0}\right)$$

Ce potentiel ne peut pas être amplifié sans dispositif particulier donc $\lim\limits_{r\to+\infty} V(r) = 0$ ce qui impose B = 0. D'autre part, il doit coïncider avec le potentiel de la charge ponctuelle q lorsqu'on se rapproche de celle-ci, soit $\lim\limits_{r\to 0^+} V(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$ qui entraîne $A = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}$. En définitive :

$$\boxed{V(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\exp\left(-\frac{r}{r_0}\right)}$$

On observe que le potentiel créé par la charge q dans le plasma est inférieur au potentiel créé par cette même charge dans le vide. Le plasma atténue donc la portée du potentiel créé par q : on dit qu'il y a ***écrantage***. Ce dernier est caractérisé par la distance r_0.

10. Le champ électrique créé en un point M (r = ||**OM**||) est tel que :

$$\boxed{\mathbf{E} = E(r)\mathbf{e}_r = -\frac{dV(r)}{dr}\mathbf{e}_r = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(1 + \frac{r}{r_0}\right)\exp\left(-\frac{r}{r_0}\right)\frac{\mathbf{r}}{r^3}}$$

11. Le flux du champ électrique à travers une surface sphérique Σ de centre O et de rayon R est :

$$\Phi(R) = \oiint_\Sigma \mathbf{E}.(dS\,\mathbf{e}_r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(1 + \frac{R}{r_0}\right)\exp\left(-\frac{R}{r_0}\right)\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta$$

soit :

$$\boxed{\Phi(R) = \frac{q}{\varepsilon_0}\left(1 + \frac{R}{r_0}\right)\exp\left(-\frac{R}{r_0}\right)}$$

12. D'après le théorème de Gauss, $\Phi(r)=\frac{q_{int}}{\varepsilon_0}=\frac{q+Q_0}{\varepsilon_0}$, où q_{int} est la charge électrique contenue à l'intérieur d'une surface sphérique de centre O et de rayon r. La charge totale diffuse, Q_0, contenue dans cette surface sphérique est donc :

$$Q_0=\varepsilon_0\Phi(r)-q=q\left(-1+\left(1+\frac{r}{r_0}\right)\exp\left(-\frac{r}{r_0}\right)\right)$$

13. La charge volumique diffuse totale à la distance r de l'origine O est alors :

$$\rho(r)=-2\rho_0\frac{V(r)}{V_0}=-\frac{q}{4\pi r_0^2 r}\exp\left(-\frac{r}{r_0}\right)$$

Électronique.

14. On suppose l'A.O. idéal $(i_+=i_-=0)$ et fonctionnant en régime linéaire $(V_+=V_-)$. On applique le théorème de Millman respectivement aux entrées inverseuse et non inverseuse ce qui nous donne :

$$\underline{V}_-=\underline{V}_e \quad , \quad \underline{V}_+=\frac{\underline{Z}_1\underline{V}'_s}{R_2+\underline{Z}_1}$$

Par ailleurs, en sortie, on a diviseur de tension donc :

$$(\underline{Z}_3+\underline{Z}_4)\underline{V}_s=\underline{Z}_4\underline{V}'_s$$

De ces trois relations on déduit aisément la fonction de transfert du montage :

$$\underline{T}=\frac{\underline{V}_s}{\underline{V}_e}=\frac{\underline{Z}_4}{\underline{Z}_3+\underline{Z}_4}\cdot\frac{R_2+\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1}$$

15. On se place dans le cas où :

$$\underline{Z}_1=r+j\left(L\omega-\frac{1}{C\omega}\right) \quad , \quad \underline{Z}_3=R_3 \quad , \quad \underline{Z}_4=R_4$$

Les tensions d'entrée et de sortie seront en phase pour une valeur ω_{01} de la pulsation ω telle que $\Im m\{\underline{T}\}=0$, ce qui se réduit ici à $\Im m\{\underline{Z}_1\}=0$, soit :

$$\omega_{01}=\frac{1}{\sqrt{LC}}$$

16. Si $\omega=\omega_{01}$ alors la fonction de transfert est réelle et telle que $T=\frac{R_4}{R_3+R_4}\cdot\frac{R_2+r}{r}$. Les amplitudes des tensions d'entrée et de sortie seront par ailleurs égales si T = 1, soit si :

$$R_2=r\frac{R_3}{R_4}$$

17. On se place maintenant dans le cas où :

$$\underline{Z}_1=R_1 \quad , \quad \underline{Z}_3=R+\frac{1}{jC\omega} \quad , \quad \underline{Y}_4=\frac{1}{R}+jC\omega$$

La fonction de transfert est alors :

$$\underline{T}=\frac{\underline{V}_s}{\underline{V}_e}=\frac{1}{\underline{Z}_3\underline{Y}_4+1}\cdot\frac{R_2+R_1}{R_1}$$

Les tensions d'entrée et de sortie seront en phase pour une valeur ω_{02} de la pulsation ω telle que $\Im m\{\underline{T}\}=0$, ce qui se réduit ici à $\Im m\{\underline{Z}_3\underline{Y}_4\}=0$, soit :

$$\omega_{02}=\frac{1}{RC}$$

18. Si $\omega = \omega_{02}$ la fonction de transfert est réelle et telle que $T = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)$. Les amplitudes des tensions d'entrée et de sortie seront égales si T = 1, soit :

$$\boxed{R_2 = 2R_1}$$

Diffraction à l'infini par une fente fine.

19. On est en présence d'une fente fine (a >> ε et a >> λ) donc le phénomène de diffraction a lieu uniquement suivant FX. L'onde plane incidente, d'amplitude ψ_0 et de vecteur d'onde $\mathbf{k}_1$, arrive normalement sur la pupille diffractante. Soit M un point courant de l'ouverture ; si on prend comme origine des phases la phase en P de l'onde émise par le point O de la pupille alors l'amplitude complexe en P de l'onde diffractée par l'ouverture est, à un facteur multiplicatif près :

$$\underline{s}_1(P) = \psi_0 \iint \underline{t}(x)\exp\left(-i\frac{2\pi}{\lambda}\mathbf{k}.\mathbf{OM}\right)dx\,dy$$

où $\underline{t}(x) = \Pi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) = \begin{cases} 1 \text{ pour } |x| \le \varepsilon/2 \\ 0 \text{ ailleurs} \end{cases}$ est la transmittance de l'ouverture.

Il en résulte que :

$$\underline{s}_1(P) = \psi_0 a\,\varepsilon \sin c\left(\frac{\pi\,\varepsilon}{\lambda}\sin\alpha\right)$$

Or la lentille est utilisée dans les conditions de Gauss soit $\sin\alpha \approx \tan\alpha = \frac{X}{f'}$ ce qui nous conduit à :

$$\underline{s}_1(P) = \psi_0 a\,\varepsilon \sin c\left(\frac{\pi\,\varepsilon}{\lambda f'}X\right)$$

L'éclairement dans le plan focal image de la lentille est alors :

$$\boxed{\mathcal{E}_1(X) = |\underline{s}_1(X)|^2 = \psi_0^2\,(a\varepsilon)^2 \sin c^2\left(\frac{\pi\varepsilon}{\lambda f'}X\right) = \mathcal{E}_{01}\sin c^2(\pi\,u\,X)}$$

si on pose :

$$\boxed{u = \frac{\varepsilon}{\lambda f'}}$$

20. L'éclairement s'annule pour les valeurs de X telles que $X = \frac{p}{u} = p\frac{\lambda f'}{\varepsilon}$ avec p entier non nul. La demi largeur à la base du maximum principal de diffraction est donc :

$$\boxed{\delta X_1 = \frac{\lambda f'}{\varepsilon}}$$

21. Dans ce cas l'amplitude complexe en P de l'onde diffractée par l'ouverture est :

$$\underline{s}_2(P) = \psi_0 \iint \underline{t}(x)\exp\left(i\frac{2\pi}{\lambda}(\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}).\mathbf{OM}\right)dx\,dy$$

ce qui nous donne, compte tenu que θ est petit :

$$\underline{s}_2(P) = \psi_0 a\,\varepsilon \sin c\left(\frac{\pi\,\varepsilon}{\lambda f'}(X - f'\theta)\right)$$

Il en résulte un éclairement :

$$\boxed{\mathcal{E}_2(X) = |\underline{s}_2(X)|^2 = \mathcal{E}_{02}\sin c^2(\pi\beta)}$$

si on pose :

$$\boxed{\beta = \frac{\varepsilon}{\lambda f'}(X - f'\theta)}$$

La figure de diffraction est identique à celle donnée par S_1 mais elle est centrée en $X_p = f'\theta$.

22. La demi largeur à la base du maximum principal de diffraction est alors :

$$\boxed{\delta X_2 = \delta X_1 = \frac{\lambda f'}{\varepsilon}}$$

23. Si les deux sources, incohérentes, éclairent simultanément la pupille diffractante les deux figures de diffraction vont se superposer dans le plan focal image de la lentille. Ces deux figures seront séparées si, d'après le ***critère de Rayleigh***, on a :

$$f'\theta \geq \frac{\lambda f'}{\varepsilon}$$

soit si :

$$\boxed{\theta \geq \theta_0 = \frac{\lambda}{\varepsilon}}$$

Thermodynamique.

24. Dans le système international la capacité calorifique massique s'exprime en $J.K^{-1}.kg^{-1}$.

25. Le corps solide indéformable, en équilibre thermodynamique à la température T_i = 350 K, va céder uniquement de la chaleur au thermostat de température T_0 = 280 K. Au cours de cette évolution son énergie interne varie de :

$$\boxed{\Delta U = Q = m\,c\left(T_0 - T_i\right) = -3{,}22\,\text{kJ}}$$

26. Sa variation d'entropie est alors :

$$\boxed{\Delta S = m\,c\int_{T_i}^{T_0}\frac{dT}{T} = m\,c\ln\left(\frac{T_0}{T_i}\right) = -10{,}3\,J.K^{-1}}$$

27. Lors de cette évolution le corps échange avec le thermostat une entropie :

$$\boxed{S^e = \frac{Q}{T_0} = -11{,}5\,J.K^{-1}}$$

28. Il en résulte que l'entropie créée lors de cette évolution est :

$$\boxed{S^p = \Delta S - S^e = 1{,}2\,J.K^{-1}}$$

On a évidemment S^p > puisque la transformation est irréversible.

Onde électromagnétique non plane.

29. Dans le vide, en l'absence de charges électriques, l'équation de Maxwell-Gauss, $\nabla.\mathbf{E} = 0$, soit $\frac{\partial \underline{E}_x}{\partial x} + \frac{\partial \underline{E}_y}{\partial y} + \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial z} = 0$, nous conduit à l'équation différentielle :

$$\frac{dE_{0x}(x)}{dx} + i\,E_{0z}(x)\frac{d\varphi(z)}{dz}\exp(i\varphi_0) = 0$$

Cette expression est analogue à celle proposée dans l'énoncé si on pose :

$$\boxed{f(x,z) = E_{0z}(x)\frac{d\varphi(z)}{dz}}$$

30. $E_{0x}(x)$ et $f(x,z)$ sont des fonctions réelles ; dans ces conditions l'équation précédente ne sera vérifiée que si $\exp(i\varphi_0) = \pm i$. Compte tenu que φ_0 est une constante réelle positive telle que $\varphi_0 \in [0;\pi]$, il vient :

$$\boxed{\varphi_0 = \frac{\pi}{2}}$$

31. L'équation différentielle peut alors se mettre sous la forme :

$$\frac{1}{E_{0z}(x)}\frac{dE_{0x}(x)}{dx} = \frac{d\varphi(z)}{dz}$$

Cette relation est vérifiée uniquement si ses deux membres sont égaux à la même constante. Comme $\frac{d\varphi(z)}{dz} < 0$ on posera la constante égale à –k où k est un réel positif homogène à l'inverse d'une longueur.
Compte tenu que $\varphi(0) = 0$, on obtient par intégration :

$$\boxed{\varphi(z) = -kz}$$

32. L'équation de propagation du champ électrique, $\Delta\mathbf{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2} = \mathbf{0}$, nous conduit, avec les résultats précédents, à :

$$\frac{d^2}{dx^2}\begin{pmatrix} E_{0x}(x) \\ E_{0z}(x) \end{pmatrix} + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2\right)\begin{pmatrix} E_{0x}(x) \\ E_{0z}(x) \end{pmatrix} = 0$$

On a donc :

$$\boxed{k_0^2 = k'^2_0 = \frac{\omega^2}{c^2} - k^2}$$

33. L'onde ne peu exister dans tout l'espace que si le champ électrique reste fini ce qui impose $\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 > 0$ soit :

$$\boxed{\omega > kc}$$

34. Pour déterminer le champ magnétique associé à cette onde on utilise l'équation de Maxwell-Faraday qui, en notation complexe, s'écrit :

$$-i\omega\underline{\mathbf{B}} = \left(\frac{\partial\underline{E}_x}{\partial z} - \frac{\partial\underline{E}_z}{\partial x}\right)\mathbf{u}_y = -i\frac{\omega^2}{kc^2}\underline{E}_x\mathbf{u}_y$$

Il en résulte que :

$$\boxed{\underline{\mathbf{B}} = \frac{\omega}{kc^2}E_{0x}(x)\exp[i(\omega t - kz)]\mathbf{u}_y}$$

Optique géométrique.

Pour un système optique centré on appelle :
a) ***plans principaux*** le couple de plans conjugués de grandissement transversal +1 ;
b) ***points principaux***, notés respectivement H_o et H_i, les intersections des plans principaux avec l'axe optique du système ;
c) ***plans antiprincipaux*** le couple de plans conjugués de grandissement transversal –1 ;
d) ***points antiprincipaux***, notés respectivement M_o et M_i, les intersections des plans antiprincipaux avec l'axe optique.

Les points antiprincipaux sont symétriques des points principaux par rapport aux foyers. Ainsi on écrira :

$$\overline{M_oF_o} = \overline{F_oH_o} \text{ et } \overline{M_iF_i} = \overline{F_iH_i}$$

Dans le cas d'une lentille mince les points principaux sont confondus avec le centre optique de la lentille soit $H_o = H_i = O$.

Dans le cas d'un miroir sphérique les points principaux sont confondus avec le sommet S du miroir et les points antiprincipaux sont confondus avec le centre C du miroir.

35. La lentille mince convergente donne de l'objet A_oB_o une image de grandissement transversal –1. Cet objet se trouve donc dans le plan antiprincipal objet de la lentille soit :

$$\boxed{\overline{OA_o} = \overline{OM_o} = 2\overline{OF_o} = -2f' = -2m}$$

36. Son image se trouve évidemment dans le plan antiprincipal image, soit :

$$\boxed{\overline{OA_i} = \overline{OM_i} = 2\overline{OF_i} = 2f' = 2m}$$

37. Le miroir sphérique concave, de sommet S et de centre C, donne de l'objet A_oB_o une image de grandissement transversal +1. L'objet se trouve donc dans le plan principal du miroir, soit :

$$\boxed{\overline{SA_{o1}} = \overline{SS} = 0}$$

38. Ce même miroir donne de l'objet A_oB_o une image de grandissement transversal −1. L'objet se trouve donc dans le plan antiprincipal du miroir, soit :

$$\boxed{\overline{SA_{o2}} = \overline{SC}}$$

39. L'objet A_oB_o est placé dans le plan antiprincipal objet de la lentille. Le sommet S du miroir est en S_1 de telle sorte que l'ensemble lentille/miroir sphérique concave donne de A_oB_o une image définitive de grandissement transversal +1. Ceci n'est possible que si S_1 est confondu avec le point antiprincipal image M_i de la lentille, soit :

$$\boxed{\overline{OS_1} = \overline{OM_i} = 2\overline{OF_i} = 2f' = 2\text{m}}$$

On peut observer que, dans cette géométrie, l'ensemble lentille/miroir sphérique concave est équivalent à un miroir plan dont le sommet Σ, conjugué objet de S_1 à travers la lentille, est confondu avec A_o et dont le centre Γ est rejeté à l'infini.

40. L'ensemble lentille/miroir sphérique concave donne de A_oB_o une image définitive de grandissement transversal −1. Le centre Γ du miroir équivalent est donc confondu avec A_o ; son image dans la lentille, c'est-à-dire C, est confondue avec M_i donc avec S_1. Il en résulte que la distance focale image du miroir concave est :

$$\boxed{f'_m = -\frac{1}{2}\overline{CS_2} = -\frac{1}{2}\overline{S_1S_2} = -0,5\text{m}}$$

Notons que dans cette géométrie l'ensemble lentille/miroir sphérique concave de rayon $R = \overline{CS} = 1\text{m}$ est équivalent à un miroir sphérique concave de centre Γ = A_o, de sommet Σ = M_i = S_1 et de rayon $R' = \overline{\Gamma\Sigma} = 4\text{m}$.

Remarque. *Les notions définies au début de cet exercice ne sont plus au programme des classes préparatoires. Il faut donc, pour sa résolution, faire appel aux formules de conjugaison ; c'est évidemment plus laborieux et le sens physique est occulté.*