ICNA - SESSION 2006
ÉPREUVE COMMUNE DE PHYSIQUE
CORRIGÉ

Rayonnement dipolaire.

1. Le champ magnétique est donné par $\mathbf{B}(M) = \nabla \wedge \mathbf{A}(M)$ soit :

$$\underline{\mathbf{B}}(M) = \frac{\partial \underline{A}_z(M)}{\partial y}\mathbf{e}_x - \frac{\partial \underline{A}_z(M)}{\partial x}\mathbf{e}_y = \left(\frac{\partial r}{\partial y}\mathbf{e}_x - \frac{\partial r}{\partial x}\mathbf{e}_y\right)\frac{\partial \underline{A}_z(M)}{\partial r} = \frac{y\,\mathbf{e}_x - x\,\mathbf{e}_y}{r}\frac{\partial \underline{A}_z(M)}{\partial r}$$

Or :

$$y\,\mathbf{e}_x - x\,\mathbf{e}_y = \mathbf{r} \wedge \mathbf{e}_z = -r\sin\theta\,\mathbf{e}_\varphi \quad \text{et} \quad \frac{\partial \underline{A}_z(M)}{\partial r} = -\frac{\mu_0 \delta}{4\pi r} I_0\left(\frac{1}{r} + jk\right)\exp\big(j(\omega t - kr)\big)$$

On en déduit :

$$\boxed{\underline{\mathbf{B}}(M) = \frac{\mu_0 \delta}{4\pi r} I_0 \sin\theta\left(\frac{1}{r} + jk\right)\exp\big(j(\omega t - kr)\big)\mathbf{e}_\varphi}$$

2. Dans la zone de rayonnement $(kr \gg 1)$ l'onde électromagnétique engendrée par le fil est localement plane. Son champ électrique est donc tel que :

$$\underline{\mathbf{E}}(M) = c\big(\underline{\mathbf{B}}(M) \wedge \mathbf{e}_r\big)$$

soit :

$$\boxed{\underline{\mathbf{E}}(M) = jk\frac{\mu_0 c}{4\pi r} I_0 \delta \sin\theta \exp\big(j(\omega t - kr)\big)\mathbf{e}_\theta}$$

3. Pour calculer le vecteur de Poynting il faut revenir aux expressions réelles des champs, soit :

$$\mathbf{B}(M) = \Re e\{\underline{\mathbf{B}}(M)\} = -k\frac{\mu_0 \delta}{4\pi r} I_0 \sin\theta \sin(\omega t - kr)\mathbf{e}_\varphi$$

$$\mathbf{E}(M) = \Re e\{\underline{\mathbf{E}}(M)\} = -k\frac{\mu_0 c}{4\pi r} I_0 \delta \sin\theta \sin(\omega t - kr)\mathbf{e}_\theta$$

On en déduit :

$$\mathbf{R}(M) = \frac{1}{\mu_0}\big(\mathbf{E}(M) \wedge \mathbf{B}(M)\big) = \frac{\mu_0 c}{16(\pi r)^2}(k I_0 \delta \sin\theta)^2 \sin^2(\omega t - kr)\mathbf{e}_r$$

d'où :

$$\boxed{\|\mathbf{R}(M)\| = \frac{\mu_0 c}{16(\pi r)^2}(k I_0 \delta \sin\theta)^2 \sin^2(\omega t - kr)}$$

4. La puissance totale moyenne rayonnée par la portion de fil est égale au flux du vecteur de Poynting moyen à travers la surface sphérique de centre O et de rayon r tel que $kr \gg 1$. On a donc :

$$\mathcal{P} = \iint_S \langle \mathbf{R}(M) \rangle . (dS\,\mathbf{e}_r) = \iint_S \langle \|\mathbf{R}(M)\| \rangle \left(r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi\right)$$

soit :

$$\boxed{\mathcal{P} = \frac{\mu_0 c}{32\pi^2}(k I_0 \delta)^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin^3\theta \, d\theta = \frac{\mu_0 c}{12\pi}(k I_0 \delta)^2}$$

Sphère uniformément chargée en surface.

5. Toute rotation autour d'un axe de la sphère laisse la distribution de charge invariante donc $\mathbf{E} = \mathbf{E}(r)$ où r est la distance entre le centre O de la sphère et le point M considéré.

Tout plan contenant le centre O de la sphère est plan de symétrie pour la distribution de charge ; **E**, vecteur vrai, appartenant à tous ces plans est radial : $\mathbf{E} = E(r)\mathbf{e}_r$.

On applique alors le théorème de Gauss à une surface sphérique Σ de centre O et de rayon r, soit :

$$4\pi r^2 E(r) = \begin{cases} Q/\varepsilon_0 \text{ si } r > R \\ 0 \text{ si } r < R \end{cases}$$

Compte tenu que $\mathbf{e}_r = \dfrac{\mathbf{OM}}{\|\mathbf{OM}\|}$, il vient :

$$\boxed{\mathbf{E}(M) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\frac{\mathbf{OM}}{\|\mathbf{OM}\|}H(r-R)}$$

Champ électrique et potentiel scalaire sont liés par $\mathbf{E} = -\nabla V$, ce qui nous donne ici $dV(r) = -E(r).dr$. Il en résulte que :

$$V(r) = \begin{cases} \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} + K_e \text{ si } r > R \\ K_i \text{ si } r < R \end{cases}$$

On détermine les constantes K_e et K_i à partir des conditions aux limites.

♦ Le potentiel est supposé nul à l'infini, soit : $\lim\limits_{r\to+\infty} V(r) = K_e = 0$.

♦ Le potentiel est continu à la surface de la sphère, soit : $K_i = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$.

En définitive il vient :

$$\boxed{V(M) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}H(r-R) + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}H(R-r)}$$

Remarques.

a) H(x) est l'échelon d'Heaviside.

b) A l'extérieur de la sphère (r > R) tout se passe comme si on avait une charge ponctuelle Q en O.

6. L'énergie électrostatique associée à cette distribution de charge est :

$$W = \iiint \frac{\varepsilon_0}{2}E^2(r)d\tau = \frac{\varepsilon_0}{2}\left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta \int_R^{+\infty} \frac{dr}{r^2}$$

soit :

$$\boxed{W = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R}}$$

7. La rotation de la sphère engendre un courant de convection de densité superficielle :

$$\mathbf{j}_s(M) = \sigma\mathbf{V}(M,S/\mathcal{R}) = \sigma(\mathbf{\Omega}(S/\mathcal{R}) \wedge \mathbf{OM}) = \sigma\Omega R\sin\theta\,\mathbf{e}_\varphi = \frac{Q}{4\pi R}\Omega\sin\theta\,\mathbf{e}_\varphi$$

L'anneau, d'axe $\Delta = (O, \mathbf{e}_z)$, repéré par l'angle θ et d'extension angulaire dθ, est alors parcouru par un courant d'intensité :

$$\boxed{dI = \mathbf{j}_s(\theta).(R\, d\theta\, \mathbf{e}_\varphi) = \frac{\Omega Q}{4\pi}\sin\theta\, d\theta}$$

8. Cet anneau, de rayon $\rho = R\sin\theta$, crée en O un champ magnétique élémentaire :

$$d\mathbf{B}(O) = \frac{\mu_0}{2\rho}dI\sin^3\theta\,\mathbf{e}_z = \frac{\mu_0}{8\pi}\frac{Q\Omega}{R}\sin^3\theta\, d\theta\,\mathbf{e}_z$$

On en déduit, par intégration, le champ magnétique total en O :

$$\boxed{\mathbf{B}(O) = \frac{\mu_0}{6\pi}\frac{Q\Omega}{R}\mathbf{e}_z}$$

Conduction et rayonnement thermiques.

9. Les deux conducteurs thermiques, cylindriques et homogènes, sont montés en série et il n'y a pas de résistance thermique de contact entre les deux cylindres. La résistance thermique de l'ensemble est alors :

$$\boxed{R_e = R_i + R_s = \frac{4e}{\pi D^2}\left(\frac{1}{\lambda_i} + \frac{1}{\lambda_s}\right) = \frac{4e}{\pi D^2}\left(\frac{\lambda_i + \lambda_s}{\lambda_i \lambda_s}\right)}$$

10. En régime stationnaire il y a continuité du flux thermique au niveau de la surface plane supérieure ce qui se traduit par :

$$\frac{T_{inf} - T_{sup,0}}{R_e} = \frac{\pi D^2}{4} h\left(T_{sup,0} - T_{atm}\right)$$

On en déduit la température de cette surface :

$$\boxed{T_{sup,0} = \frac{\pi D^2 h R_e T_{atm} + 4T_{inf}}{\pi D^2 h R_e + 4}}$$

11. Le contact entre les deux cylindres étant parfait on définit une température d'interface unique notée $T_{I,0}$. En régime stationnaire, en l'absence de terme de production, le flux thermique est conservé ce que l'on peut traduire par :

$$\frac{T_{I,0} - T_{sup,0}}{R_s} = \frac{T_{inf} - T_{sup,0}}{R_e}$$

avec $R_s = \frac{4e}{\pi D^2 \lambda_s}$. On en déduit :

$$\boxed{T_{I,0} = T_{sup,0} + \frac{4e}{\pi D_2 \lambda_s R_e}\left(T_{inf} - T_{sup,0}\right)}$$

soit encore, si on explicite R_e :

$$\boxed{T_{I,0} = \frac{\lambda_i T_{inf} + \lambda_s T_{sup,0}}{\lambda_i + \lambda_s}}$$

La température à l'interface des deux cylindres apparaît comme le barycentre de T_{inf} et $T_{sup,0}$ affectés respectivement des coefficients λ_i et λ_s.

12. Si $T_{mur} = T_{sup}$ alors l'échange net radiatif entre les murs et le cylindre supérieur est nul.

13. La surface plane du cylindre supérieur est en contact avec un fluide transparent. En régime stationnaire la condition de continuité du flux d'énergie, compte tenu de la loi de Stefan, implique :

$$\frac{T_{inf} - T_{sup}}{R_e} = \frac{\pi D^2}{4} h\left(T_{sup} - T_{atm}\right) + \frac{\pi D^2}{4}\sigma\left(T_{sup}^4 - T_{mur}^4\right)$$

Or, on suppose que les températures T_{mur} et T_{sup} sont suffisamment proches pour écrire le terme d'échange net radiatif sous la forme :

$$\frac{\pi D^2}{4}\sigma\left(T_{sup}^4 - T_{mur}^4\right) = \frac{\pi D^2}{4}\sigma\left(T_{sup}^2 + T_{mur}^2\right)\left(T_{sup} + T_{mur}\right)\left(T_{sup} - T_{mur}\right) \approx \pi D^2 \sigma T_{mur}^3\left(T_{sup} - T_{mur}\right)$$

Il en résulte que :

$$\boxed{T_{sup} = \frac{\pi D^2 R_e\left(hT_{atm} + 4\sigma T_{mur}^4\right) + 4T_{inf}}{\pi D^2 R_e\left(h + 4\sigma T_{mur}^3\right) + 4}}$$

N.B. Le rayonnement thermique et la loi de Stefan ne sont pas au programme des classes de PC et PSI.

Machine frigorifique.

14. Dans une machine thermique on a, rapporté à l'unité de masse, $q_{froid} > 0$, $q_{chaud} < 0$ et $w > 0$. Dans l'exemple proposé, le fluide caloporteur reçoit de la source froide, au cours d'un cycle, une quantité de chaleur par unité de masse :

$$\boxed{q_{froid} = h_A - h_E = h_A - h_D = 1137 \text{kJ.kg}^{-1}}$$

et de la source chaude :

$$\boxed{q_{chaud} = h_D - h_B = -1325 \text{kJ.kg}^{-1}}$$

15. L'efficacité de la machine frigorifique est définie par $\eta = \frac{q_{froid}}{w}$. Or, le premier principe de la thermodynamique appliqué, au cours d'un cycle, à l'unité de masse du fluide s'écrit :

$$w + q_{froid} + q_{chaud} = 0$$

Il en résulte que :

$$\boxed{\eta = \frac{q_{froid}}{-\left(q_{froid} + q_{chaud}\right)} = \frac{-1}{1 + \frac{q_{chaud}}{q_{froid}}} \approx 6}$$

16. La variation d'enthalpie massique de la vapeur - considérée comme un gaz parfait - au cours du refroidissement isobare BC est donnée par la deuxième loi de Joule :

$$h_C - h_B = c_p \left(T_C - T_B\right)$$

D'autre part, la variation d'enthalpie massique du fluide au cours de sa liquéfaction isobare et totale CD, à la température T_C, est telle :

$$h_D - h_C = -\ell_v \left(T_C\right)$$

L'enthalpie massique étant une fonction d'état on déduit, des deux relations précédentes, la chaleur latente de vaporisation du fluide à la température T_C :

$$\boxed{\ell_v \left(T_C\right) = h_B - h_D - c_p \left(T_B - T_C\right)}$$

17. Au cours de la vaporisation totale du fluide du point d'équilibre E au point A, à la température T_A, on observe une variation d'enthalpie massique :

$$h_A - h_D = \left(1 - x_E\right) \ell_v \left(T_A\right)$$

On en déduit le titre massique en vapeur au point E :

$$\boxed{x_E = 1 - \frac{h_A - h_D}{\ell_v \left(T_A\right)} \approx 0{,}12}$$

18. Pour maintenir constante la température de la chambre froide le fluide doit recevoir de la source froide, en régime stationnaire, une puissance thermique :

$$\mathcal{P}_{th} = D_m q_{froid}$$

Le fluide frigorifique présente donc un débit massique :

$$\boxed{D_m = \frac{\mathcal{P}_{th}}{q_{froid}} = 0{,}012 \text{kg.s}^{-1}}$$

Circuit RC en régime transitoire.

19. Après fermeture de l'interrupteur le circuit est parcouru par un courant d'intensité :

$$i(t) = -\frac{dq_b(t)}{dt} = -C_b \frac{dv(t)}{dt} = \frac{v(t) - u(t)}{R_b} = \frac{u(t)}{R_a} + C_a \frac{du(t)}{dt}$$

On en déduit les deux équations différentielles :

$$\boxed{\frac{dv(t)}{dt}+\frac{v(t)-u(t)}{R_bC_b}=0} \quad (1) \qquad \boxed{\frac{d^2u(t)}{dt^2}+\left(\frac{1}{R_bC_a}+\frac{1}{R_aC_a}+\frac{1}{R_bC_b}\right)\frac{du(t)}{dt}+\frac{u(t)}{R_aR_bC_aC_b}=0} \quad (2)$$

L'équation différentielle (2) a pour équation caractéristique l'équation du second degré :

$$z^2+\left(\frac{1}{R_bC_a}+\frac{1}{R_aC_a}+\frac{1}{R_bC_b}\right)z+\frac{1}{R_aC_aR_bC_b}=0$$

Le discriminant de cette équation :

$$\Delta=\left(\frac{1}{R_bC_a}+\frac{1}{R_aC_a}+\frac{1}{R_bC_b}\right)^2-\frac{4}{R_aC_aR_bC_b}=\frac{1}{(R_bC_a)^2}+\frac{2}{R_bC_a}\left(\frac{1}{R_aC_a}+\frac{1}{R_bC_b}\right)+\left(\frac{1}{R_aC_a}-\frac{1}{R_bC_b}\right)^2$$

est toujours positif. L'équation caractéristique admet donc deux solutions réelles et négatives (*le produit des racines est positif alors que leur somme est négative*). On les notera respectivement z_1 et z_2 avec $z_2 < z_1$. La solution générale de (2), de type apériodique, est donc de la forme :

$$u(t)=A\exp(z_1t)+B\exp(z_2t)$$

On détermine les constantes A et B à l'aide des conditions initiales :

$$u(0)=A+B=0 \quad \text{et} \quad \left(\frac{du(t)}{dt}\right)_{t=0}=z_1A+z_2B=\frac{v(0)}{R_bC_a}$$

On obtient en définitive :

$$\boxed{u(t)=\frac{v(0)}{(z_1-z_2)R_bC_a}\left(\exp(z_1t)-\exp(z_2t)\right)}$$

On peut alors déterminer v(t) avec l'équation (1).

Notons que u(t) passe par un maximum à l'instant $t_1 > 0$ tel que :

$$t_1=\frac{1}{z_1-z_2}\ln\left(\frac{z_2}{z_1}\right)$$

20. Dans le cas limite $R_b = 0$ le condensateur de capacité C_a se charge très rapidement, sans que la tension aux bornes de C_b varie notablement. Les deux condensateurs montés en parallèle, de capacité totale $C=(C_a+C_b)$, se déchargent alors à travers la résistance R_a avec une constante de temps $\tau=R_a(C_a+C_b)$.

L'œil.

Remarques préliminaires.

♦ Typiquement l'œil normal (*emmétrope*) qui n'accommode pas (*punctum remotum* R *à l'infini*) présente une vergence de l'ordre de $V \approx 60\,\delta$. Par ailleurs si on suppose que le punctum proximum P est à 15 cm en avant de l'œil on aura une amplitude dioptrique d'accommodation $A \approx 6{,}7\,\delta$.

♦ Les questions gagneraient à être posées avec plus de rigueur et de clarté. Quant à la distance cristallin/rétine elle est à revoir à la hausse.

21. L'objet, situé entre le punctum remotum et le punctum proximum de l'œil normal donne, sur la rétine, une image ***réelle et renversée***. C'est le cerveau qui la redresse.

Le cristallin est assimilé à une lentille mince convergente, de centre optique O et de vergence V variable, séparant deux milieux d'indices différents n_o = 1 (*air*) et $n_i=\frac{4}{3}$ (*corps vitré*) ; une telle lentille convergente est équivalente à un ***dioptre sphérique*** de sommet O.

22. On a $\overline{AB}=10\,\text{cm}$, $\overline{OA}=-1\,\text{m}$ et $\overline{OA'}=d=15\,\text{mm}$. Le grandissement transversal correspondant est :

$$\boxed{G_t = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{1}{n_i}\frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = -0{,}0113}$$

et la taille de l'image :

$$\boxed{\overline{A'B'} = G_t\,\overline{AB} = -0{,}113\,\text{cm}}$$

23. Dans cette situation la vergence du cristallin est :

$$\boxed{V = \frac{-1}{\overline{OA}} + \frac{n_i}{\overline{OA'}} = 89{,}9\,\delta}$$

24. La distance œil/objet est divisée par 4 ; il en résulte que :

♦ le grandissement transversal et la taille de l'image sont multipliés par 4, soit $\overline{A'B'} = -0{,}45\,\text{cm}$;

♦ la vergence du cristallin est augmentée de 3 δ.

25. L'œil myope, lorsqu'il regarde un objet à l'infini, présente une vergence :

$$\boxed{V = \frac{n_i}{d'} = \frac{(4/3)}{14{,}5.10^{-3}} = 92{,}0\,\delta}$$

La position de son punctum remotum est donc telle que :

$$\overline{OR} = \frac{d}{n_i - Vd} = -32{,}6\,\text{cm}$$

c'est-à-dire à 32,6 cm en avant de l'œil.

On corrige ce problème de vue avec une lentille divergente dont le foyer image doit être confondu avec le punctum remotum de l'œil myope. Elle doit donc présenter une vergence :

$$\boxed{V' = \frac{1}{\overline{O'F'}} = \frac{1}{\overline{O'O} + \overline{OR}} = -3{,}3\,\delta}$$

26. Une lentille divergente ***ne donne jamais*** une image réelle d'un objet réel. Dans la situation présente, la position de l'image intermédiaire par rapport à l'œil est telle que :

$$\boxed{\overline{OA'} = \overline{OO'} + \overline{O'A'} = \overline{OO'} + \frac{\overline{O'A}}{1 + V'.\overline{O'A}} = \overline{OO'} + \frac{\overline{O'O} + \overline{OA}}{1 + V'\left(\overline{O'O} + \overline{OA}\right)} = -25{,}3\,\text{cm}}$$

Cette image virtuelle sert d'objet réel pour l'œil.

27. L'image définitive se forme sur la rétine. Le cristallin de l'œil myope présente alors une vergence :

$$\boxed{V = \frac{-1}{\overline{OA'}} + \frac{n_i}{\overline{OA''}} = 92{,}8\,\delta}$$

Le grandissement transversal relatif à la lentille divergente est :

$$\boxed{G'_t = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{O'A'}}{\overline{O'A}} = 0{,}238}$$

et celui relatif à l'œil :

$$\boxed{G_t = \frac{\overline{A''B''}}{\overline{A'B'}} = \frac{1}{n_i}\frac{\overline{OA''}}{\overline{OA'}} = -0{,}0445}$$

28. Des résultats précédents on déduit :

$$\boxed{\left|\overline{A'B'}\right| = 2{,}38\,\text{cm}} \qquad \boxed{\left|\overline{A''B''}\right| = 0{,}11\,\text{cm}}$$

Dispositif des fentes d'Young.

29. Les deux ondes qui interfèrent proviennent de la diffraction de la lumière (*raie turquoise, peu intense, du mercure*) par les fentes F_1 et F_2.

30. Pour observer le phénomène de diffraction (*et d'interférence*) dans les conditions de Fraunhofer, il faut placer :

♦ la fente source S dans le plan focal objet de la lentille L_1 (*on réalise un collimateur*) ;
♦ l'écran d'observation E dans le plan focal image de la lentille L_2.
L'objet diffractant se situe entre L_1 et L_2.

31. Si on suppose que la fente source est centrée sur l'axe optique du système alors l'éclairement de l'écran E est tel que :

$$\mathcal{E}(x) = 2\mathcal{E}_0 \operatorname{sinc}^2\left(\pi \frac{ax}{\lambda f'}\right)\left(1+\cos\left(2\pi\frac{dx}{\lambda f'}\right)\right)$$

On observe, à l'intérieur de la tâche centrale de diffraction, des franges d'interférence parallèles à l'axe Oy et équidistantes de :

$$i = \frac{\lambda f'}{d} \approx 0,05\text{mm}$$

32. La translation, parallèlement à Ox, de l'objet diffractant est sans effet sur la distribution d'éclairement de l'écran E : la figure d'interférence et la valeur de l'interfrange ne sont pas modifiées.

33. Si, à partir du montage initial, on translate la fente source S d'une distance c suivant la direction Ox alors la figure d'interférence subit une translation de c en sens inverse de celle de S, mais la valeur de l'interfrange n'est pas modifiée.

34. La frange centrale, brillante, est centrée sur image géométrique de la source.

Mouvement d'une sphère homogène le long d'un plan incliné.

35. On a un mouvement plan sur plan donc le vecteur rotation instantanée est tel que :

$$\boldsymbol{\Omega}(S/\mathcal{R}) = \Omega\,\mathbf{e}_{z0}$$

36. Le théorème de la résultante dynamique appliqué à S dans $\mathcal{R}$ s'écrit :

$$m\mathbf{a}(S/\mathcal{R}) = m\mathbf{g} + \mathbf{R}$$

On en déduit par projection, respectivement suivant $\mathbf{e}_x$ et $\mathbf{e}_y$, les deux équations scalaires :

$$m\ddot{x} = T + mg\sin\alpha \quad (1\text{-a}) \qquad 0 = N - mg\cos\alpha \quad (1\text{-b})$$

37. On applique à S le théorème du moment cinétique barycentrique :

$$\left(\frac{d\boldsymbol{\sigma}(C,S/\mathcal{R}^*)}{dt}\right)_{\mathcal{R}^*} = \mathbf{M}_{ext}(C)$$

avec $\boldsymbol{\sigma}(C,S/\mathcal{R}^*) = I\Omega\,\mathbf{e}_{z0}$ et $\mathbf{M}_{ext}(C) = \mathbf{CC}\wedge m\mathbf{g} + \mathbf{CI}\wedge\mathbf{R} = rT\,\mathbf{e}_{z0}$.
On en déduit :

$$I\frac{d\Omega}{dt} = rT \quad (2)$$

38. La sphère roule sans glisser sur le plan incliné si sa vitesse de glissement en I est nulle à chaque instant :

$$\mathbf{V}(I,S/\mathcal{R}) = \mathbf{V}(I,S/\mathcal{R}) + \boldsymbol{\Omega}(S/\mathcal{R})\wedge\mathbf{CI} = (\dot{x} + r\Omega)\mathbf{e}_x = \mathbf{0}$$

soit :

$$\dot{x} = -r\Omega \quad (3)$$

Les relations (2) et (3) nous conduisent alors à :

$$T = -\frac{2}{5}m\ddot{x} \quad (4)$$

39. On obtient l'énergie cinétique de la sphère dans $\mathcal{R}$ à l'aide du théorème de Koenig :

$$E_c = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}I\Omega^2$$

soit avec le condition de roulement sans glissement :

$$\boxed{E_c = \frac{7}{10} m\dot{x}^2 = \frac{7}{4} I\Omega^2} \quad (5)$$

On applique le théorème de la puissance cinétique à S dans $\mathcal{R}$:

$$\frac{dE_c}{dt} = \mathcal{P}_{ext}$$

La sphère roulant sans glisser sur le plan incliné la puissance des efforts extérieurs se réduit à la puissance développée par le poids, soit :

$$\mathcal{P}_g = m\,\mathbf{g}.\mathbf{V}(C,S/\mathcal{R}) = m\,g\,\dot{x}\sin\alpha$$

On en déduit :

$$\boxed{\ddot{x} = \frac{5}{7} g \sin\alpha} \quad (6)$$

puis avec (1-a) ou (4) :

$$\boxed{T = -\frac{2}{7} mg \sin\alpha} \quad (7)$$

40. Il y a effectivement roulement sans glissement si, d'après les lois de Coulomb-Morin, $|T| < fN$, soit :

$$\boxed{\tan\alpha < \frac{7}{2} f} \quad (8)$$