ICNA - SESSION 2006
ÉPREUVE OPTIONNELLE DE PHYSIQUE
CORRIGÉ

Électrocinétique : régime sinusoïdal.

1. En régime établi, la charge $\underline{Z}_u$ est soumise à une tension d'amplitude complexe $\underline{U}_u = \dfrac{\underline{Z}_u}{\underline{Z}_u + \underline{Z}_g} E_0$ et est traversée par un courant dont l'intensité présente l'amplitude complexe $\underline{I} = \dfrac{E_0}{\underline{Z}_u + \underline{Z}_g}$. La puissance moyenne absorbée par ce dipôle est alors :

$$\mathcal{P}_u = \frac{1}{2}\Re e\left\{\underline{U}_u.\underline{I}^*\right\} = \frac{R_u E_0^2}{2\left[\left(R_u + R_g\right)^2 + \left(X_u + X_g\right)^2\right]}$$

2. Cette puissance sera maximale si on a simultanément $\dfrac{\partial \mathcal{P}_u}{\partial R_u} = 0$ et $\dfrac{\partial \mathcal{P}_u}{\partial X_u} = 0$. On en déduit aisément :

$$R_u = R_g \text{ et } X_u = -X_g \Rightarrow \underline{Z}_u = \underline{Z}_g^*$$

3. Il en résulte que :

$$\mathcal{P}_{max} = \frac{E_0^2}{8R_g}$$

4. L'amplitude complexe du générateur de Thévenin équivalent au circuit entre les bornes C et D est celle de la tension aux bornes de $\underline{Z}_1$ car le courant est nul dans $\underline{Z}_2$. En utilisant le diviseur de tension il vient :

$$\underline{E}_{th} = \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + R_g} E_0 = \frac{jX_1 E_0}{R_g + jX_1}$$

5. L'impédance interne du générateur de Thévenin défini dans la question précédente est telle que :

$$\underline{Z}_{th} = \underline{Z}_2 + \frac{R_g \underline{Z}_1}{R_g + \underline{Z}_1} = \frac{jR_g\left(X_1 + X_2\right) - X_1 X_2}{R_g + jX_1}$$

6. On branche une charge de résistance R_u $\left(R_u < R_g\right)$ entre les bornes du générateur de Thévenin défini précédemment. La puissance moyenne absorbée par R_u est maximale si on a simultanément (*analogie avec les questions* 1 *et* 2) $R_u = \Re e\left\{\underline{Z}_{th}\right\}$ et $\Im m\left\{\underline{Z}_{th}\right\} = 0$. On en déduit :

$$X_1 = R_g\sqrt{\frac{R_u}{R_g - R_u}} \text{ et } X_2 = -\sqrt{R_u\left(R_g - R_u\right)}$$

7. On a respectivement $\underline{Z}_1 = jX_1 = jL\omega$ et $\underline{Z}_2 = jX_2 = -\dfrac{j}{C\omega}$. Il en résulte que :

$$L = \frac{R_g}{\omega}\sqrt{\frac{R_u}{R_g - R_u}} = 3{,}33\text{H et } C = \frac{1}{\omega\sqrt{R_u\left(R_g - R_u\right)}} = 333\text{nF}$$

8. Dans les conditions précédentes la charge résistive absorbe une puissance maximale $\mathcal{P}_{max} = \dfrac{E_0^2}{8R_g}$; par contre,la puissance absorbée devient $\mathcal{P}'_u = \dfrac{R_u E_0^2}{2\left(R_u + R_g\right)^2}$ si elle est directement branchée aux bornes du générateur. Le rapport de ces puissances est donc tel que :

$$\eta = \frac{\mathcal{P}_{max}}{\mathcal{P}'_u} = \frac{\left(R_u + R_g\right)^2}{4R_u R_g} = 3$$

Cycle de Diesel.

9. Au cours de la compression isentropique $A \to B$ le gaz - supposé parfait avec $\gamma = Cte$ - suit la loi de Laplace, d'où :

$$T_B = T_A \left(\frac{p_B}{p_A}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = 723K$$

Par ailleurs $V_B = V_A \left(\dfrac{p_A}{p_B}\right)^{\frac{1}{\gamma}} = V_A \left(\dfrac{T_A}{T_B}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} = 0,276.10^{-3} m^3$; il en résulte un taux de compression $\alpha = \dfrac{V_A}{V_B} \approx 9,0$.

10. De même pour la détente isentropique $C \to D$ on a : $T_D = T_C \left(\dfrac{V_C}{V_D}\right)^{\gamma-1}$.

Or $V_D = V_A$ car la transformation $B \to C$ est isobare et $V_C = V_B \dfrac{T_C}{T_B} = \dfrac{T_C}{T_B}\left(\dfrac{T_A}{T_B}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} V_A$ car l'évolution $D \to A$ est isochore. Il en résulte que :

$$T_D = T_A \left(\frac{T_C}{T_B}\right)^{\gamma} = 1404K$$

On peut noter que le rapport de détente est $\beta = \dfrac{V_A}{V_C} = \alpha \dfrac{T_B}{T_C} \approx 3,0$.

11. Au cours de la phase de combustion (*détente isobare irréversible* $B \to C$) la quantité de chaleur Q_c échangée entre le gaz et le milieu extérieur est égale la variation d'enthalpie du gaz. Compte tenu qu'un gaz parfait suit la deuxième loi de Joule, il vient :

$$Q_c = \Delta H_{BC} = nc_p\left(T_C - T_B\right) = \frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p_A V_A}{T_A}\left(T_C - T_B\right) = 4,22kJ$$

12. Au cours de la phase de refroidissement isochore irréversible $D \to A$ la quantité de chaleur Q_f échangée entre le gaz et le milieu extérieur est égale à la variation d'énergie interne du gaz. Compte tenu qu'un gaz parfait suit la première loi de Joule il vient :

$$Q_f = \Delta U_{DA} = nc_V\left(T_A - T_D\right) = \frac{1}{\gamma-1}\frac{p_A V_A}{T_A}\left(T_A - T_D\right) = -2,29kJ$$

13. L'efficacité thermodynamique du moteur est alors :

$$\eta = \frac{-W}{Q_c} = 1 + \frac{Q_f}{Q_c} = 1 - \frac{T_D - T_A}{\gamma\left(T_C - T_B\right)} = 0,46$$

14. Dans le cas d'un moteur décrivant, de manière réversible, un cycle de Carnot et fonctionnant entre deux sources de chaleur de températures respectives T_A et T_C, on obtient :

$$\boxed{\eta_C = 1 - \frac{T_A}{T_C} = 0{,}86}$$

Point matériel sur un guide circulaire.

15. On applique à la bille le théorème de l'énergie cinétique entre l'instant où on l'abandonne sans vitesse initiale en A et l'instant où elle atteint le point O. En l'absence de frottements il vient :

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = mgh$$

d'où :

$$\boxed{v_0 = \sqrt{2gh}}$$

16. La même démarche entre O et M nous conduit à :

$$\frac{1}{2}mv_M^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = -mga\left(1-\cos\theta\right)$$

On en déduit, compte tenu de l'expression de v_0 :

$$\boxed{v_M = \sqrt{2g\left[a\left(\cos\theta - 1\right) + h\right]}}$$

17. On applique la deuxième loi de Newton à la bille dans le référentiel $\mathcal{R}$ lié au guide et supposé galiléen :

$$m\mathbf{a}\left(M/\mathcal{R}\right) = \mathbf{R} + m\mathbf{g}$$

Tant que la bille reste en contact avec le guide elle a un mouvement circulaire d'accélération :

$$\mathbf{a}\left(M/\mathcal{R}\right) = a\left(\ddot{\theta}\mathbf{e}_\theta - \dot{\theta}^2\mathbf{e}_r\right) = a\left(\ddot{\theta}\mathbf{e}_\theta - \frac{v_M^2}{a^2}\mathbf{e}_r\right)$$

Par ailleurs on a $\mathbf{g} = g\left(\cos\theta\,\mathbf{e}_r - \sin\theta\,\mathbf{e}_\theta\right)$ et $\mathbf{R} = R\,\mathbf{e}_r$ car il n'y a pas de frottements.

La réaction du guide circulaire sur la bille est alors :

$$\boxed{\mathbf{R} = R\mathbf{e}_r = \left(-mg\cos\theta - m\frac{v_M^2}{a}\right)\mathbf{e}_r = -mg\left(\frac{2h}{a} + 3\cos\theta - 2\right)\mathbf{e}_r}$$

18. La liaison bille/guide est unilatérale ; la bille peut avoir un mouvement révolutif si $R\left(\pi\right) < 0$, soit si :

$$\boxed{h > h_{min} = \frac{5}{2}a}$$

19. On lâche la bille, sans vitesse initiale, d'une hauteur $h_0 = 2a < h_{min}$; elle va donc quitter le guide pour une valeur $\theta = \theta_0 < \pi$ telle que $R\left(\theta_0\right) = 0$, soit :

$$\boxed{\cos\theta_0 = -\frac{2}{3} \Rightarrow \theta_0 = 131{,}8°}$$

20. En ce point la vitesse de la bille est la même sur le cercle et sur la parabole osculatrice que va décrire le point matériel sous la seule action de la pesanteur. Elle présente suivant Ox une composante :

$$\boxed{v_{Ox} = v_M\left(\theta_0\right)\cos\theta_0 = -\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}ga}}$$

21. Au sommet de la parabole la vitesse de la bille est uniquement horizontale et égale à v_{Ox}. On applique le théorème de l'énergie cinétique à la bille entre l'instant où elle quitte le guide et l'instant où elle atteint son altitude maximale :

$$\frac{1}{2}mv_{Ox}^2 - \frac{1}{2}mv_M^2\left(\theta_0\right) = -mg\left(h_M - a\left(1-\cos\theta_0\right)\right)$$

qui nous donne :

$$\boxed{h_M = \frac{50}{27}a < 2a}$$

Dispositif des trous d'Young.

22. L'éclairement du plan d'observation (*démonstration de cours*) est défini par :

$$\boxed{\mathcal{E}_1(x) = 4\psi_0^2 \cos^2\left(\pi\frac{ax}{\lambda f}\right) = 2\psi_0^2\left(1+\cos\left(2\pi\frac{ax}{\lambda f}\right)\right)}$$

23. Les franges d'interférence - courbes iso-éclairement sur l'écran - sont des droites (*en fait on observe des segments de droite*) définies par $x = Cte$, équidistantes de :

$$\boxed{i_0 = \frac{\lambda f}{a} = 0{,}10\text{mm}}$$

24. Dans ce cas la différence de marche en M(x) devient :

$$\delta'(x) = a\left(\frac{x}{f} - \theta_0\right)$$

Le système de franges a subit, en bloc, une translation égale au déplacement de la frange d'ordre zéro, soit :

$$\boxed{d = f\theta_0 \approx 0{,}24\text{mm}}$$

25. Les sources sont mutuellement incohérentes donc, dans le plan d'observation, les éclairements s'ajoutent :

$$\mathcal{E}_2(x) = 2\psi_0^2\left(1+\cos\left(2\pi\frac{a}{\lambda}\left(\frac{x}{f}-\frac{\theta}{2}\right)\right)\right) + 2\psi_0^2\left(1+\cos\left(2\pi\frac{a}{\lambda}\left(\frac{x}{f}+\frac{\theta}{2}\right)\right)\right)$$

soit :

$$\boxed{\mathcal{E}_2(x) = 4\psi_0^2\left(1+\cos\left(\pi\frac{a\theta}{\lambda}\right)\cos\left(2\pi\frac{ax}{\lambda f}\right)\right)}$$

26. Le facteur de visibilité est $V = \left|\cos\left(\pi\frac{a\theta}{\lambda}\right)\right|$; il s'annule (*brouillage des franges*) pour θ fixé lorsque la distance entre les trous prend les valeurs :

$$\boxed{a_k = \left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{\theta} \quad (k \in \mathbb{N})}$$

27. Les franges disparaissent la première fois pour $a_0 = 10\text{mm}$ ce qui correspond à :

$$\boxed{\theta = \frac{\lambda}{2a_0} = 6{,}2''}$$

Association de condensateurs.

28. On ferme l'interrupteur K_1 et on laisse ouvert K_2.
La charge du condensateur de capacité C_3 reste nulle : $\boxed{Q_3 = 0}$
Les condensateurs de capacités respectives C_1 et C_2, montés en série, prennent la même charge sous la tension totale E. On a donc :

$$Q_1 = Q_2 \quad \text{et} \quad E = \frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q_2}{C_2} = \frac{1}{2C}(Q_1 + 2Q_2)$$

ce qui nous donne :

$$\boxed{Q_1 = Q_2 = \frac{2}{3}CE}$$

29. L'énergie électrostatique totale du système est :

$$\boxed{\mathcal{E} = \frac{Q_1^2}{2C_1} + \frac{Q_2^2}{2C_2} = \frac{1}{3}CE^2}$$

30. On ouvre l'interrupteur K_1 puis on ferme K_2.

La charge électrique du condensateur de capacité C_1 ne varie pas car il est isolé : $\boxed{Q'_1 = Q_1 = \frac{2}{3}CE}$

La charge Q_2 portée par le condensateur de capacité C_2 va se répartir sur C_2 et C_3. Les deux condensateurs étant montés en parallèle ils sont soumis à la même tension. Ainsi on a :

$$Q_2 = Q'_2 + Q'_3 = \frac{2}{3}CE \quad \text{et} \quad \frac{Q'_2}{C_2} = \frac{Q'_3}{C_3} \Rightarrow Q'_2 = 3Q'_3$$

d'où on déduit :

$$\boxed{Q'_2 = \frac{1}{2}CE \,,\; Q'_3 = \frac{1}{6}CE}$$

31. L'énergie électrostatique totale du système dans ce nouvel état d'équilibre est :

$$\boxed{\mathcal{E}' = \frac{Q'^2_1}{2C_1} + \frac{Q'^2_2}{2C_2} + \frac{Q'^2_3}{2C_3} = \frac{5}{18}CE^2}$$

Notons que $\mathcal{E}' - \mathcal{E} = -\frac{1}{18}CE^2 < 0$; l'énergie perdue a été dissipée dans la résistance du circuit.

32. Le générateur est remplacé par un court-circuit, l'interrupteur K_2 reste fermé et on ferme K_1. La charge totale portée par les trois condensateurs va se répartir sur C_1, C_2 et C_3 montés en parallèle. On a alors :

$$Q''_1 - \left(Q''_2 + Q''_3\right) = Q'_1 - \left(Q'_2 + Q'_3\right) = 0 \quad \text{et} \quad -\frac{Q''_1}{C_1} = \frac{Q''_2}{C_2} = \frac{Q''_3}{C_3} \Rightarrow -\frac{Q''_1}{2} = Q''_2 = 3Q''_3$$

Il en résulte que $Q''_1 = Q''_2 = Q''_3 = 0$ donc $\mathcal{E}'' = 0$ et :

$$\boxed{\Delta\mathcal{E} = \mathcal{E}'' - \mathcal{E}' = -\frac{5}{18}CE^2}$$

Électromécanique.

33. Il apparaît dans la tige, qui se déplace à la vitesse $\mathbf{v} = v(t)\mathbf{e}_x$ dans le champ magnétique uniforme et constant **B**, une f.é.m. induite :

$$e(t) = \int_{MN} \left(\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}\right).\left(dy\,\mathbf{e}_y\right) = -aBv(t)$$

On néglige la résistance des fils de jonction et des rails ainsi que le phénomène d'auto-induction. L'équation électrique du circuit s'écrit alors :

$$E - aBv(t) = \frac{q(t)}{C} + Ri(t)$$

La tige conductrice, parcourue par le courant i(t) et plongée dans le champ magnétique uniforme et constant **B**, est soumise :

♦ à la force de Laplace $\mathbf{F}_L = \int_{MN} \left(i(t)dy\,\mathbf{e}_y\right) \wedge \left(B\,\mathbf{e}_z\right) = aBi(t)\mathbf{e}_x$;

♦ à son poids $-mg\,\mathbf{e}_z$;

♦ à la réaction des rails $\mathbf{R} = N\,\mathbf{e}_z$ (*pas de frottements*).

Le théorème de la résultante dynamique appliqué à la tige T dans le référentiel lié aux rails et supposé galiléen nous donne en projection selon ex :

$$m\frac{dv(t)}{dt} = aBi(t)$$

On dérive l'équation électrique par rapport au temps et on élimine v(t) à l'aide de l'équation mécanique. Il vient :

$$\frac{di(t)}{dt}+\frac{m+a^2B^2C}{mRC}i(t)=0$$

Cette équation différentielle homogène du premier ordre à coefficients constants admet une solution de la forme $i(t)=I_0\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$ si on pose :

$$\tau=\frac{mRC}{m+a^2B^2C}$$

34. Sachant qu'à l'instant t = 0 on a $q(0)=0$ et $v(0)=0$, l'équation électrique nous donne :

$$I_0=i(0)=\frac{E}{R}$$

35. A partir de l'équation mécanique, compte tenu que $v(0)=0$, on obtient :

$$v(t)=v_0\left(1-\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right)$$

où v_0, vitesse limite atteinte par la tige, est telle que :

$$v_0=\frac{aBE\tau}{mR}$$

36. L'énergie fournie par le générateur entre les instants t = 0 et $t=\infty$ est :

$$\mathcal{E}_g=\int_0^{+\infty}E\,i(t)dt=\frac{E^2\tau}{R}$$

37. L'énergie emmagasinée par le condensateur pendant la même durée est :

$$\mathcal{E}_C=\frac{1}{C}\int_0^{+\infty}q(t)i(t)dt=\frac{q^2(+\infty)}{2C}$$

Or, d'après l'équation électrique on a :

$$q(+\infty)=C(E-aBv_0)=\frac{E\tau}{R}$$

Il en résulte que :

$$\mathcal{E}_C=\frac{E^2\tau^2}{2R^2C}$$

38. L'énergie dissipée sous forme de chaleur par effet Joule dans la résistance de la tige, toujours pendant la même durée, est :

$$\mathcal{E}_J=\int_0^{+\infty}R\,i^2(t)dt=\frac{E^2\tau}{2R}$$

39. Enfin le travail des forces de Laplace entre les instants t = 0 et $t=\infty$ est :

$$W=\int_0^{+\infty}aBi(t)v(t)dt=\int_0^{+\infty}mv(t)dv(t)=\frac{1}{2}mv_0^2=\frac{1}{2m}\left(\frac{aBe\tau}{R}\right)^2$$

Il correspond à la variation d'énergie cinétique de la tige entre ces deux instants.

40. Le bilan énergétique se traduit par :

$$\mathcal{E}_g=\mathcal{E}_C+\mathcal{E}_J+W$$

L'énergie fournie par le générateur :

♦ sert en partie à charger le condensateur et à communiquer à la tige de l'énergie cinétique ;

♦ est dissipée, pour l'autre partie, dans la résistance de la tige par effet Joule.