# ICNA - SESSION 2007
# ÉPREUVE COMMUNE DE PHYSIQUE
# CORRIGÉ

## Onde électromagnétique dans un milieu conducteur.

**1.** Le milieu est soumis à un champ électrique constant et uniforme $\mathbf{E}_0$. On applique la relation fondamentale de la dynamique à un électron dans le référentiel, supposé galiléen, lié aux ions immobiles. Seules sont prises en compte la force électrique et l'interaction électrons/ions, ainsi il vient :

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt}+\alpha\mathbf{v}=\frac{-e}{m}\mathbf{E}_0$$

En régime permanent l'accélération s'annule et les électrons présentent la vitesse constante :

$$\mathbf{v}_{\lim}=\frac{-e}{\alpha m}\mathbf{E}_0$$

Il en résulte une densité volumique de courant :

$$\mathbf{j}_0=-\rho e\mathbf{v}_{\lim}=\frac{\rho e^2}{\alpha m}\mathbf{E}_0$$

En identifiant avec la loi d'Ohm locale on en déduit la conductivité du milieu :

$$\boxed{\gamma_0=\frac{\rho e^2}{\alpha m}}$$

**2.** Le milieu est maintenant soumis à l'action d'une onde électromagnétique plane progressive harmonique de champ électrique $\underline{\mathbf{E}}=\mathbf{E}_0\exp\left(i\left(\omega t-kx\right)\right)$ avec $\mathbf{E}_0$ (*supposé réel*) orthogonal à Ox. Il en résulte un champ magnétique associé :

$$\boxed{\underline{\mathbf{B}}=\frac{1}{c}\left(\mathbf{e}_x\wedge\underline{\mathbf{E}}\right)=\frac{1}{c}\left(\mathbf{e}_x\wedge\mathbf{E}_0\right)\exp\left(i\left(\omega t-kx\right)\right)}$$

On envisage le rapport $\dfrac{\left\|\mathbf{F}_m\right\|}{\left\|\mathbf{F}_e\right\|}$, soit :

$$\boxed{\frac{\left\|\mathbf{F}_m\right\|}{\left\|\mathbf{F}_e\right\|}=\frac{\left\|-e\left(\mathbf{v}\wedge\mathbf{B}\right)\right\|}{\left\|-e\mathbf{E}\right\|}\leq\frac{v}{c}\ll 1}$$

car les électrons sont non relativistes.
On peut donc négliger, dans la force de Lorentz, l'action du champ magnétique de l'onde devant celle du champ électrique.

**3.** Dans ce cas l'équation différentielle du mouvement de l'électron s'écrit :

$$\frac{d\mathbf{v}\left(x,t\right)}{dt}+\alpha\mathbf{v}\left(x,t\right)=\frac{-e}{m}\mathbf{E}\left(x,t\right)$$

avec $\dfrac{d\mathbf{v}}{dt}=\dfrac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}+\left(\mathbf{v}.\mathbf{grad}\right)\mathbf{v}$. Or, $\mathbf{v}$ étant, comme $\mathbf{E}$, orthogonal à Ox, on a $\left(\mathbf{v}.\mathbf{grad}\right)\mathbf{v}=\mathbf{0}$ ; l'équation différentielle précédente devient :

$$\frac{\partial\mathbf{v}\left(x,t\right)}{\partial t}+\alpha\mathbf{v}\left(x,t\right)=\frac{-e}{m}\mathbf{E}\left(x,t\right)$$

En régime forcé, à la pulsation ω, l'équation différentielle, en notation complexe, nous conduit à :

$$\underline{\mathbf{v}}\left(x,t\right)=\frac{-e}{m\left(\alpha+i\omega\right)}\underline{\mathbf{E}}\left(x,t\right)$$

Il en résulte une densité volumique de courant :

$$\underline{\mathbf{j}}(x,t) = -\rho e\,\underline{\mathbf{v}}(x,t) = \frac{\rho e^2}{\alpha m\left(1+i\dfrac{\omega}{\alpha}\right)}\underline{\mathbf{E}}(x,t) = \frac{\gamma_0}{\left(1+i\dfrac{\omega}{\alpha}\right)}\underline{\mathbf{E}}(x,t)$$

d'où une conductivité complexe :

$$\boxed{\underline{\gamma} = \frac{\gamma_0}{\left(1+i\dfrac{\omega}{\alpha}\right)}}$$

**4.** L'équation de Maxwell-Faraday nous donne, en utilisant le formalisme complexe :

$$\boxed{\underline{\mathbf{B}} = \frac{k}{\omega}\left(\mathbf{e}_x \wedge \underline{\mathbf{E}}\right)}$$

L'équation de Maxwell-Ampère nous conduit à :

$$\boxed{ik\left(\mathbf{e}_x \wedge \underline{\mathbf{B}}\right) = -\left(\mu_0\underline{\gamma} + i\frac{\omega}{c^2}\right)\underline{\mathbf{E}}}$$

**5.** L'élimination du champ magnétique entre les deux équations précédentes nous conduit à la relation de dispersion :

$$\boxed{k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - i\mu_0\omega\underline{\gamma}}$$

On observe que k est complexe : le milieu est absorbant.

## Solénoïde.

**6.** La démonstration s'effectue à l'aide de la loi de Biot-Savart, on obtient :

$$\boxed{\mathbf{B}_s(M) = \frac{\mu_0 I}{2R}\sin^3\alpha\,\mathbf{e}_z}$$

**7.** On considère une tranche de solénoïde, d'épaisseur dz, centrée en un point P - en non pas en O - tel que $\mathbf{OP} = z\,\mathbf{e}_z$. Cet élément peut être assimilé à une spire circulaire de rayon R, parcourue par un courant d'intensité $dI = \rho I\,dz$. Il en résulte, au point M de l'axe Oz, un champ magnétique élémentaire :

$$\boxed{d\mathbf{B}(M) = \frac{\mu_0 dI}{2R}\sin^3\alpha\,\mathbf{e}_z = \rho\mathbf{B}_s(M)\,dz}$$

**8.** On reprend l'expression précédente sous la forme :

$$d\mathbf{B}(M) = \frac{\mu_0\rho I}{2R}\sin^3\alpha\,dz\,\mathbf{e}_z$$

On suppose que le point M sur l'axe Oz est tel que $\mathbf{OM} = z'\mathbf{e}_z$ avec $z' > z > 0$.

Compte tenu que $(z'-z)\tan\alpha = R$, d'où $dz = \dfrac{R\,d\alpha}{\sin^2\alpha}$, il vient :

$$d\mathbf{B}(M) = \frac{\mu_0\rho I}{2}d(-\cos\alpha)\,\mathbf{e}_z$$

Par intégration on obtient :

$$\boxed{\mathbf{B}(M) = \frac{\mu_0\rho I}{2}\left(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2\right)\mathbf{e}_z}$$

**9.** Dans le cas d'un solénoïde infini, soit pour $\alpha_1 \approx 0$ et $\alpha_2 \approx \pi$ pour un point M de Oz intérieur au bobinage, on obtient un champ magnétique uniforme à l'intérieur et nul à l'extérieur, soit :

$$\boxed{\mathbf{B}(M) = \begin{cases}\mu_0\rho I\,\mathbf{e}_z \text{ si } \delta < R\\ \mathbf{0} \text{ si } \delta > R\end{cases}}$$

La démonstration s'effectue aisément en appliquant le théorème d'Ampère le long d'un contour rectangulaire $\Gamma$ contenu dans un plan passant par Oz et dont l'un des côtés est sur Oz.

**10.** Le champ magnétique (pseudo-vecteur) est axial ce qui implique que le potentiel-vecteur (vecteur vrai) est orthoradial. Le théorème de Stokes nous permet d'écrire :

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{A}.d\ell = \iint_S \mathbf{B}.d\mathbf{S}$$

En utilisant un contour circulaire $\mathcal{C}$, d'axe Oz et de rayon δ, il vient :

$$2\pi\delta A_\theta(\delta) = \begin{cases} \pi\delta^2\mu_0\rho I \text{ si } \delta < R \\ \pi R^2\mu_0\rho I \text{ si } \delta > R \end{cases}$$

Il en résulte :

$$\boxed{A_\theta(\delta) = \begin{cases} \dfrac{\mu_0\rho I}{2}\delta \text{ si } \delta < R \\ \dfrac{\mu_0\rho I}{2}\dfrac{R^2}{\delta} \text{ si } \delta > R \end{cases}}$$

Notons que le potentiel-vecteur est continu en $\delta = R$ .

**Remarque.** A l'intérieur du solénoïde le champ magnétique uniforme est relié au potentiel-vecteur par :

$$\mathbf{A}_{\text{int}} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{B}_{\text{int}} \wedge \mathbf{r}\right)$$

## Électronique.

Les AO sont considérés comme idéaux $(i_+ = i_- = 0)$ et en régime linéaire $(V_+ = V_-)$.

**Remarque.** Par définition la valeur efficace X d'une grandeur x(t) périodique est telle que :

$$X^2 = \frac{1}{T}\int_0^T x^2(t)dt$$

On ne peut donc, en aucun cas, parler de "valeur efficace complexe"
Par contre on peut noter $\underline{e}$ l'expression complexe de la tension instantanée e(t).

**11.** En régime linéaire on a :

$$\boxed{\underline{u}_{AB} = \underline{V}_A - \underline{V}_B = \underline{V}_{1-} - \underline{V}_{1+} = 0}$$

Par ailleurs, le théorème de Millman appliqué à l'entrée inverseuse se traduit par :

$$\underline{V}_A = \frac{1}{2}\left(\underline{V}_S + \underline{V}_D\right) = \underline{V}_B$$

On en déduit, compte tenu que $\underline{V}_M = 0$ :

$$\boxed{\underline{u}_{BM} = \frac{1}{2}\left(\underline{s} + \underline{u}_{DM}\right)}$$

**12.** Comme $\underline{V}_A = \underline{V}_B$ , il vient :

$$\boxed{\underline{u}_{AM} = \underline{u}_{BM}}$$

**13.** Le théorème de Millman appliqué à l'entrée non inverseuse nous donne :

$$\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right)\underline{V}_B = \frac{\underline{V}_E}{R} + \frac{\underline{V}_I}{R_3}$$

Compte tenu de $\underline{V}_A = \frac{1}{2}\left(\underline{V}_S + \underline{V}_D\right) = \underline{V}_B$ on en déduit :

$$\boxed{\frac{1}{2}\left(\underline{s} + \underline{u}_{DM}\right) = \frac{R_2R_3}{R_2R_3 + RR_2 + RR_3}\left(\underline{e} + \frac{R}{R_3}\underline{u}_{IM}\right)}$$

**14.** Le deuxième AO est monté en intégrateur inverseur (*intégrateur de Miller*), on a :

$$\underline{V}_F = \underline{V}_M = 0 \quad , \quad \frac{1}{R_1}\left(\underline{V}_D - \underline{V}_F\right) = jC\omega\left(\underline{V}_F - \underline{V}_I\right)$$

d'où :

$$\boxed{\underline{u}_{FM} = 0} \qquad \boxed{\underline{u}_{DM} = -jCR_1\omega\underline{u}_{IM}}$$

**15.** Le troisième AO est aussi monté en intégrateur inverseur, d'où :

$$\boxed{\underline{u}_{IM} = -jCR_3\omega\underline{s}}$$

**16.** Les relations précédentes nous conduisent à :

$$\boxed{\underline{s}(t) = \frac{-1}{R_1R_3C^2\omega^2}\underline{u}_{DM}}$$

**17.** Dans la relation obtenue à la question 13 on explicite $\underline{u}_{DM}$ et $\underline{u}_{IM}$ en fonction de $\underline{s}$ , soit :

$$\left(1 - R_1R_3C^2\omega^2\right)\underline{s} = \frac{2R_2R_3}{R_2R_3 + RR_2 + RR_3}\left(\underline{e} - jCR\omega\underline{s}\right)$$

On en déduit la fonction de transfert :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{2R_2R_3}{R_2R_3 + RR_2 + RR_3}\frac{1}{1 + 2j\dfrac{RR_2R_3C\omega}{R_2R_3 + RR_2 + RR_3} - R_1R_3C^2\omega^2}$$

que l'on peut mettre sous la forme :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{G}{1 + 2jm\dfrac{\omega}{\omega_0} + \left(j\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

si on pose :

$$\boxed{G = \frac{2R_2R_3}{R_2R_3 + RR_2 + RR_3}}$$

**18.** Et :

$$\boxed{m = \frac{RR_2R_3}{\sqrt{R_1R_3}\left(R_2R_3 + RR_2 + RR_3\right)} \quad , \quad \omega_0 = \frac{1}{C\sqrt{R_1R_3}}}$$

**19.** Numériquement on obtient :

$$\boxed{G = 0,9955 \quad , \quad m = 0,0498 \quad , \quad \omega_0 = 10^4\,\mathrm{rad.s^{-1}}}$$

## Optique géométrique.

**20.** Un faisceau parallèle incident, incliné sur l'axe optique, converge en un foyer image secondaire. Un faisceau incident issu d'un foyer objet secondaire donne un faisceau émergent parallèle ; sa direction est déterminée par le rayon non dévié qui passe par le centre optique de la lentille.
Les réponses correspondent donc aux constructions B et C.

**21.** Avec une lentille divergente le rayon émergent ne peut pas se rapprocher de l'axe optique. Aucune construction ne convient.

**22.** La construction B convient. On peut la compléter par le rayon non dévié qui passe par le centre optique de la lentille et le foyer image secondaire où converge le faisceau parallèle incident.

**23.** Les rayons émergents, issus d'un faisceau parallèle incident, ont leurs prolongements qui se coupent en un foyer image secondaire. C'est ce que l'on observe sur la construction C.

**24.** Le miroir sphérique envisagé est ***concave et convergent***.

**25.** Foyer objet et foyer image sont confondus avec le milieu du segment $[CS]$. On a donc :

$$\boxed{\overline{SF} = \overline{SF'} \quad , \quad \overline{SF} = \overline{F'C}}$$

**26.** Un rayon incident qui passe par F est réfléchi parallèlement à l'axe optique.
Un rayon incident qui passe par C est réfléchi sur lui-même.
Les constructions A et D permettent de déterminer la direction du rayon réfléchi.

**27.** Le système $\Sigma_1$ est afocal si le foyer principal image de $L_1$ est confondu avec le foyer principal objet de $L_2$ ; la distance entre les deux lentilles est alors :

$$d = \overline{O_1O_2} = f'_1 + f'_2$$

**28.** Le système $\Sigma_2$ est afocal - c'est-à-dire équivalent à un miroir plan - si le foyer principal image de la lentille convergente est confondu avec le sommet du miroir sphérique, soit :

$$F'_1 = S$$

**29.** Le système $\Sigma_3$ est afocal si le foyer principal image de la lentille divergente est confondu avec le centre C du miroir sphérique, soit :

$$F'_2 = C$$

**Remarque.** Pour se convaincre de ces deux derniers résultats il suffit de faire un schéma en considérant un faisceau parallèle incident dans la direction de l'axe optique du système.

## Satellite artificiel.

**30.** On suppose le satellite hors atmosphère et on néglige les actions dues aux autres astres que la Terre. Dans ce cas il subit une force centrale donc radiale : l'interaction de gravitation.

**31.** Comme le satellite est soumis à une force centrale, le théorème du moment cinétique appliqué à S en T - centre de la Terre - dans $\mathcal{R}$ se traduit par :

$$\left(\frac{d\mathbf{L}(T,S/\mathcal{R})}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = \mathbf{0}$$

Il en résulte que :

$$\mathbf{L}(T,S/\mathcal{R}) = \mathbf{TS} \wedge m\mathbf{V}(S/\mathcal{R}) = \mathbf{L}_0$$

est une constante vectorielle.

**32.** Le mouvement de S autour de la Terre est maintenant supposé être plan, uniforme et circulaire à une altitude h. Dans ce cas son vecteur accélération est tel que :

$$\mathbf{a}(S/\mathcal{R}) = \left(\frac{d\mathbf{V}(S/\mathcal{R})}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = -\frac{\left\|\mathbf{V}(S/\mathcal{R})\right\|^2}{R_T + h}\mathbf{e}_\rho$$

**33.** La deuxième loi de Newton appliquée à S dans $\mathcal{R}$ nous conduit à $\dfrac{GM_T}{(R_T+h)^2} = \dfrac{\left\|\mathbf{V}(S/\mathcal{R})\right\|^2}{R_T+h}$. On en déduit la vitesse du satellite sur son orbite circulaire :

$$\left\|\mathbf{V}(S/\mathcal{R})\right\| = \sqrt{\frac{GM_T}{R_T + h}}$$

**34.** La période de révolution du satellite est donnée par :

$$T_0 = 2\pi\frac{R_T + h}{\left\|\mathbf{V}(S/\mathcal{R})\right\|} = 2\pi\sqrt{\frac{(R_T + h)^3}{GM_T}}$$

Elle est indépendante de m et proportionnelle à $(R_T + h)^{3/2}$.

**35.** Le satellite est géostationnaire si sa période de révolution, dans le référentiel géocentrique, est égale à celle de la Terre. Pour cela il faut qu'il se trouve à une altitude h telle que :

$$\boxed{h = \left( GM_T \left( \frac{T_0}{2\pi} \right)^2 \right)^{\frac{1}{3}} - R_T \approx 36.10^3\,\text{km}}$$

**36.** L'énergie cinétique du satellite sur son orbite est :

$$\boxed{E_c = \frac{1}{2} m \left\| \mathbf{V}\left(S/\mathcal{R}\right) \right\|^2 = \frac{GmM_T}{2\left(R_T + h\right)} \approx 9400\,\text{MJ}}$$

**37.** Son énergie potentielle est :

$$\boxed{E_p = -\frac{GmM_T}{R_T + h} \approx -18{,}9\,\text{GJ}}$$

**38.** Il en résulte une énergie mécanique :

$$\boxed{E = E_c + E_p = -\frac{GmM_T}{2\left(R_T + h\right)} = \frac{E_p}{2} \approx -9{,}5\,\text{GJ}}$$

**39.** Au moment où S' passe par son périgée sa vitesse est maximale et la distance entre S' et T est minimale.

**40.** On utilise la troisième loi de Képler qui nous conduit à :

$$\boxed{a = \left(R_T + h\right) \left( \frac{T}{T_0} \right)^{\frac{2}{3}} \approx 155.10^3\,\text{km}}$$

-:-:-:-:-