

# ICNA - SESSION 2007

## ÉPREUVE COMMUNE DE PHYSIQUE

### CORRIGÉ

#### Onde électromagnétique dans un milieu conducteur.

1. Le milieu est soumis à un champ électrique constant et uniforme  $\mathbf{E}_0$ . On applique la relation fondamentale de la dynamique à un électron dans le référentiel, supposé galiléen, lié aux ions immobiles. Seules sont prises en compte la force électrique et l'interaction électrons/ions, ainsi il vient :

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} + \alpha\mathbf{v} = \frac{-e}{m}\mathbf{E}_0$$

En régime permanent l'accélération s'annule et les électrons présentent la vitesse constante :

$$\mathbf{v}_{\text{lim}} = \frac{-e}{\alpha m}\mathbf{E}_0$$

Il en résulte une densité volumique de courant :

$$\mathbf{j}_0 = -\rho e \mathbf{v}_{\text{lim}} = \frac{\rho e^2}{\alpha m}\mathbf{E}_0$$

En identifiant avec la loi d'Ohm locale on en déduit la conductivité du milieu :

$$\gamma_0 = \frac{\rho e^2}{\alpha m}$$

2. Le milieu est maintenant soumis à l'action d'une onde électromagnétique plane progressive harmonique de champ électrique  $\underline{\mathbf{E}} = \mathbf{E}_0 \exp(i(\omega t - kx))$  avec  $\mathbf{E}_0$  (supposé réel) orthogonal à Ox. Il en résulte un champ magnétique associé :

$$\underline{\mathbf{B}} = \frac{1}{c}(\mathbf{e}_x \wedge \underline{\mathbf{E}}) = \frac{1}{c}(\mathbf{e}_x \wedge \mathbf{E}_0) \exp(i(\omega t - kx))$$

On envisage le rapport  $\frac{\|\mathbf{F}_m\|}{\|\mathbf{F}_e\|}$ , soit :

$$\frac{\|\mathbf{F}_m\|}{\|\mathbf{F}_e\|} = \frac{\| -e(\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}) \|}{\| -e\mathbf{E} \|} \leq \frac{v}{c} \ll 1$$

car les électrons sont non relativistes.

On peut donc négliger, dans la force de Lorentz, l'action du champ magnétique de l'onde devant celle du champ électrique.

3. Dans ce cas l'équation différentielle du mouvement de l'électron s'écrit :

$$\frac{d\mathbf{v}(x,t)}{dt} + \alpha\mathbf{v}(x,t) = \frac{-e}{m}\mathbf{E}(x,t)$$

avec  $\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad})\mathbf{v}$ . Or,  $\mathbf{v}$  étant, comme  $\mathbf{E}$ , orthogonal à Ox, on a  $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad})\mathbf{v} = \mathbf{0}$  ; l'équation différentielle précédente devient :

$$\frac{\partial\mathbf{v}(x,t)}{\partial t} + \alpha\mathbf{v}(x,t) = \frac{-e}{m}\mathbf{E}(x,t)$$

En régime forcé, à la pulsation  $\omega$ , l'équation différentielle, en notation complexe, nous conduit à :

$$\underline{\mathbf{v}}(x,t) = \frac{-e}{m(\alpha + i\omega)}\underline{\mathbf{E}}(x,t)$$

Il en résulte une densité volumique de courant :

$$\underline{\mathbf{j}}(x, t) = -\rho e \underline{\mathbf{v}}(x, t) = \frac{\rho e^2}{\alpha m \left(1 + i \frac{\omega}{\alpha}\right)} \underline{\mathbf{E}}(x, t) = \frac{\gamma_0}{\left(1 + i \frac{\omega}{\alpha}\right)} \underline{\mathbf{E}}(x, t)$$

d'où une conductivité complexe :

$$\underline{\gamma} = \frac{\gamma_0}{\left(1 + i \frac{\omega}{\alpha}\right)}$$

4. L'équation de Maxwell-Faraday nous donne, en utilisant le formalisme complexe :

$$\underline{\mathbf{B}} = \frac{k}{\omega} (\mathbf{e}_x \wedge \underline{\mathbf{E}})$$

L'équation de Maxwell-Ampère nous conduit à :

$$ik (\mathbf{e}_x \wedge \underline{\mathbf{B}}) = -\left(\mu_0 \underline{\gamma} + i \frac{\omega}{c^2}\right) \underline{\mathbf{E}}$$

5. L'élimination du champ magnétique entre les deux équations précédentes nous conduit à la relation de dispersion :

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - i \mu_0 \omega \underline{\gamma}$$

On observe que  $k$  est complexe : le milieu est absorbant.

### Solénoïde.

6. La démonstration s'effectue à l'aide de la loi de Biot-Savart, on obtient :

$$\underline{\mathbf{B}}_s(M) = \frac{\mu_0 I}{2R} \sin^3 \alpha \mathbf{e}_z$$

7. On considère une tranche de solénoïde, d'épaisseur  $dz$ , centrée en un point  $P$  - en non pas en  $O$  - tel que  $\underline{\mathbf{OP}} = z \mathbf{e}_z$ . Cet élément peut être assimilé à une spire circulaire de rayon  $R$ , parcourue par un courant d'intensité  $dI = \rho I dz$ . Il en résulte, au point  $M$  de l'axe  $Oz$ , un champ magnétique élémentaire :

$$d\underline{\mathbf{B}}(M) = \frac{\mu_0 dI}{2R} \sin^3 \alpha \mathbf{e}_z = \rho \underline{\mathbf{B}}_s(M) dz$$

8. On reprend l'expression précédente sous la forme :

$$d\underline{\mathbf{B}}(M) = \frac{\mu_0 \rho I}{2R} \sin^3 \alpha dz \mathbf{e}_z$$

On suppose que le point  $M$  sur l'axe  $Oz$  est tel que  $\underline{\mathbf{OM}} = z' \mathbf{e}_z$  avec  $z' > z > 0$ .

Compte tenu que  $(z' - z) \tan \alpha = R$ , d'où  $dz = \frac{R d\alpha}{\sin^2 \alpha}$ , il vient :

$$d\underline{\mathbf{B}}(M) = \frac{\mu_0 \rho I}{2} d(-\cos \alpha) \mathbf{e}_z$$

Par intégration on obtient :

$$\underline{\mathbf{B}}(M) = \frac{\mu_0 \rho I}{2} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2) \mathbf{e}_z$$

9. Dans le cas d'un solénoïde infini, soit pour  $\alpha_1 \approx 0$  et  $\alpha_2 \approx \pi$  pour un point  $M$  de  $Oz$  intérieur au bobinage, on obtient un champ magnétique uniforme à l'intérieur et nul à l'extérieur, soit :

$$\underline{\mathbf{B}}(M) = \begin{cases} \mu_0 \rho I \mathbf{e}_z & \text{si } \delta < R \\ \mathbf{0} & \text{si } \delta > R \end{cases}$$

La démonstration s'effectue aisément en appliquant le théorème d'Ampère le long d'un contour rectangulaire  $\Gamma$  contenu dans un plan passant par  $Oz$  et dont l'un des côtés est sur  $Oz$ .

10. Le champ magnétique (pseudo-vecteur) est axial ce qui implique que le potentiel-vecteur (vecteur vrai) est orthoradial. Le théorème de Stokes nous permet d'écrire :

$$\oint_C \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

En utilisant un contour circulaire  $C$ , d'axe Oz et de rayon  $\delta$ , il vient :

$$2\pi\delta A_\theta(\delta) = \begin{cases} \pi\delta^2\mu_0\rho I & \text{si } \delta < R \\ \pi R^2\mu_0\rho I & \text{si } \delta > R \end{cases}$$

Il en résulte :

$$A_\theta(\delta) = \begin{cases} \frac{\mu_0\rho I}{2}\delta & \text{si } \delta < R \\ \frac{\mu_0\rho I}{2}\frac{R^2}{\delta} & \text{si } \delta > R \end{cases}$$

Notons que le potentiel-vecteur est continu en  $\delta = R$ .

**Remarque.** A l'intérieur du solénoïde le champ magnétique uniforme est relié au potentiel-vecteur par :

$$\mathbf{A}_{\text{int}} = \frac{1}{2}(\mathbf{B}_{\text{int}} \wedge \mathbf{r})$$

## Électronique.

Les AO sont considérés comme idéaux ( $i_+ = i_- = 0$ ) et en régime linéaire ( $V_+ = V_-$ ).

**Remarque.** Par définition la valeur efficace  $X$  d'une grandeur  $x(t)$  périodique est telle que :

$$X^2 = \frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt$$

On ne peut donc, en aucun cas, parler de "valeur efficace complexe"

Par contre on peut noter  $\underline{e}$  l'expression complexe de la tension instantanée  $e(t)$ .

11. En régime linéaire on a :

$$\underline{u}_{AB} = \underline{V}_A - \underline{V}_B = \underline{V}_{1-} - \underline{V}_{1+} = 0$$

Par ailleurs, le théorème de Millman appliqué à l'entrée inverseuse se traduit par :

$$\underline{V}_A = \frac{1}{2}(\underline{V}_S + \underline{V}_D) = \underline{V}_B$$

On en déduit, compte tenu que  $\underline{V}_M = 0$  :

$$\underline{u}_{BM} = \frac{1}{2}(\underline{s} + \underline{u}_{DM})$$

12. Comme  $\underline{V}_A = \underline{V}_B$ , il vient :

$$\underline{u}_{AM} = \underline{u}_{BM}$$

13. Le théorème de Millman appliqué à l'entrée non inverseuse nous donne :

$$\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right)\underline{V}_B = \frac{\underline{V}_E}{R} + \frac{\underline{V}_I}{R_3}$$

Compte tenu de  $\underline{V}_A = \frac{1}{2}(\underline{V}_S + \underline{V}_D) = \underline{V}_B$  on en déduit :

$$\frac{1}{2}(\underline{s} + \underline{u}_{DM}) = \frac{R_2 R_3}{R_2 R_3 + R R_2 + R R_3} \left( \underline{e} + \frac{R}{R_3} \underline{u}_{IM} \right)$$

14. Le deuxième AO est monté en intégrateur inverseur (*intégrateur de Miller*), on a :

$$\underline{V}_F = \underline{V}_M = 0 \quad , \quad \frac{1}{R_1}(\underline{V}_D - \underline{V}_F) = jC\omega(\underline{V}_F - \underline{V}_I)$$

d'où :

$$\boxed{\underline{u}_{FM} = 0} \quad \boxed{\underline{u}_{DM} = -jCR_1\omega\underline{u}_{IM}}$$

15. Le troisième AO est aussi monté en intégrateur inverseur, d'où :

$$\boxed{\underline{u}_{IM} = -jCR_3\omega\underline{s}}$$

16. Les relations précédentes nous conduisent à :

$$\boxed{\underline{s}(t) = \frac{-1}{R_1R_3C^2\omega^2}\underline{u}_{DM}}$$

17. Dans la relation obtenue à la question 13 on explicite  $\underline{u}_{DM}$  et  $\underline{u}_{IM}$  en fonction de  $\underline{s}$ , soit :

$$(1 - R_1R_3C^2\omega^2)\underline{s} = \frac{2R_2R_3}{R_2R_3 + RR_2 + RR_3}(\underline{e} - jC\omega\underline{s})$$

On en déduit la fonction de transfert :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{2R_2R_3}{R_2R_3 + RR_2 + RR_3} \frac{1}{1 + 2j\frac{RR_2R_3C\omega}{R_2R_3 + RR_2 + RR_3} - R_1R_3C^2\omega^2}$$

que l'on peut mettre sous la forme :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{G}{1 + 2jm\frac{\omega}{\omega_0} + \left(j\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

si on pose :

$$\boxed{G = \frac{2R_2R_3}{R_2R_3 + RR_2 + RR_3}}$$

18. Et :

$$\boxed{m = \frac{RR_2R_3}{\sqrt{R_1R_3}(R_2R_3 + RR_2 + RR_3)} \quad , \quad \omega_0 = \frac{1}{C\sqrt{R_1R_3}}}$$

19. Numériquement on obtient :

$$\boxed{G = 0,9955 \quad , \quad m = 0,0498 \quad , \quad \omega_0 = 10^4 \text{ rad.s}^{-1}}$$

## Optique géométrique.

20. Un faisceau parallèle incident, incliné sur l'axe optique, converge en un foyer image secondaire. Un faisceau incident issu d'un foyer objet secondaire donne un faisceau émergent parallèle ; sa direction est déterminée par le rayon non dévié qui passe par le centre optique de la lentille. Les réponses correspondent donc aux constructions B et C.

21. Avec une lentille divergente le rayon émergent ne peut pas se rapprocher de l'axe optique. Aucune construction ne convient.

22. La construction B convient. On peut la compléter par le rayon non dévié qui passe par le centre optique de la lentille et le foyer image secondaire où converge le faisceau parallèle incident.

23. Les rayons émergents, issus d'un faisceau parallèle incident, ont leurs prolongements qui se coupent en un foyer image secondaire. C'est ce que l'on observe sur la construction C.

24. Le miroir sphérique envisagé est **concave et convergent**.

25. Foyer objet et foyer image sont confondus avec le milieu du segment [CS]. On a donc :

$$\boxed{\overline{SF} = \overline{SF'} \quad , \quad \overline{SF} = \overline{F'C}}$$

**26.** Un rayon incident qui passe par F est réfléchi parallèlement à l'axe optique.  
Un rayon incident qui passe par C est réfléchi sur lui-même.  
Les constructions A et D permettent de déterminer la direction du rayon réfléchi.

**27.** Le système  $\Sigma_1$  est afocal si le foyer principal image de  $L_1$  est confondu avec le foyer principal objet de  $L_2$  ; la distance entre les deux lentilles est alors :

$$\boxed{d = \overline{O_1 O_2} = f'_1 + f'_2}$$

**28.** Le système  $\Sigma_2$  est afocal - c'est-à-dire équivalent à un miroir plan - si le foyer principal image de la lentille convergente est confondu avec le sommet du miroir sphérique, soit :

$$\boxed{F'_1 = S}$$

**29.** Le système  $\Sigma_3$  est afocal si le foyer principal image de la lentille divergente est confondu avec le centre C du miroir sphérique, soit :

$$\boxed{F'_2 = C}$$

**Remarque.** Pour se convaincre de ces deux derniers résultats il suffit de faire un schéma en considérant un faisceau parallèle incident dans la direction de l'axe optique du système.

### Satellite artificiel.

**30.** On suppose le satellite hors atmosphère et on néglige les actions dues aux autres astres que la Terre. Dans ce cas il subit une force centrale donc radiale : l'interaction de gravitation.

**31.** Comme le satellite est soumis à une force centrale, le théorème du moment cinétique appliqué à S en T - centre de la Terre - dans  $\mathcal{R}$  se traduit par :

$$\left( \frac{d\mathbf{L}(T, S/\mathcal{R})}{dt} \right)_{\mathcal{R}} = \mathbf{0}$$

Il en résulte que :

$$\boxed{\mathbf{L}(T, S/\mathcal{R}) = \mathbf{TS} \wedge m\mathbf{V}(S/\mathcal{R}) = \mathbf{L}_0}$$

est une constante vectorielle.

**32.** Le mouvement de S autour de la Terre est maintenant supposé être plan, uniforme et circulaire à une altitude h. Dans ce cas son vecteur accélération est tel que :

$$\boxed{\mathbf{a}(S/\mathcal{R}) = \left( \frac{d\mathbf{V}(S/\mathcal{R})}{dt} \right)_{\mathcal{R}} = -\frac{\|\mathbf{V}(S/\mathcal{R})\|^2}{R_T + h} \mathbf{e}_\rho}$$

**33.** La deuxième loi de Newton appliquée à S dans  $\mathcal{R}$  nous conduit à  $\frac{GM_T}{(R_T + h)^2} = \frac{\|\mathbf{V}(S/\mathcal{R})\|^2}{R_T + h}$ . On en déduit la vitesse du satellite sur son orbite circulaire :

$$\boxed{\|\mathbf{V}(S/\mathcal{R})\| = \sqrt{\frac{GM_T}{R_T + h}}}$$

**34.** La période de révolution du satellite est donnée par :

$$\boxed{T_0 = 2\pi \frac{R_T + h}{\|\mathbf{V}(S/\mathcal{R})\|} = 2\pi \sqrt{\frac{(R_T + h)^3}{GM_T}}}$$

Elle est indépendante de m et proportionnelle à  $(R_T + h)^{3/2}$ .

**35.** Le satellite est géostationnaire si sa période de révolution, dans le référentiel géocentrique, est égale à celle de la Terre. Pour cela il faut qu'il se trouve à une altitude h telle que :

$$h = \left( GM_T \left( \frac{T_0}{2\pi} \right)^2 \right)^{\frac{1}{3}} - R_T \approx 36.10^3 \text{ km}$$

36. L'énergie cinétique du satellite sur son orbite est :

$$E_c = \frac{1}{2} m \| \mathbf{V}(S/\mathcal{R}) \|^2 = \frac{GmM_T}{2(R_T + h)} \approx 9400 \text{ MJ}$$

37. Son énergie potentielle est :

$$E_p = -\frac{GmM_T}{R_T + h} \approx -18,9 \text{ GJ}$$

38. Il en résulte une énergie mécanique :

$$E = E_c + E_p = -\frac{GmM_T}{2(R_T + h)} = \frac{E_p}{2} \approx -9,5 \text{ GJ}$$

39. Au moment où S' passe par son périégée sa vitesse est maximale et la distance entre S' et T est minimale.

40. On utilise la troisième loi de Képler qui nous conduit à :

$$a = (R_T + h) \left( \frac{T}{T_0} \right)^{\frac{2}{3}} \approx 155.10^3 \text{ km}$$

-:-:-:-