ICNA - SESSION 2007
ÉPREUVE OPTIONNELLE DE PHYSIQUE
CORRIGÉ

Filtre actif passe-bas d'ordre deux.

1. L'AO idéal $(\underline{i}_+ = \underline{i}_-)$ fonctionne en régime linéaire, donc $\underline{V}_+ = \underline{V}_- = \underline{V}_s$ dans la structure proposée.
On note M le point commun au condensateur de capacité C_2 et aux deux résistances.
Le théorème de Millman appliqué en E_+ et M nous donne respectivement :

$$\underline{V}_M = (1 + R\underline{Y}_1)\underline{V}_s \quad , \quad \underline{V}_e + (1 + R\underline{Y}_2)\underline{V}_s = (2 + R\underline{Y}_2)\underline{V}_M$$

Par élimination de $\underline{V}_M$ entre ces deux relations on obtient la fonction de transfert du montage :

$$\underline{H}(i\omega) = \frac{\underline{V}_s}{\underline{V}_e} = \frac{1}{1 + 2R\underline{Y}_1 + R^2\underline{Y}_1\underline{Y}_2}$$

Or, $\underline{Y}_k = Y_k \exp\left(i\frac{\pi}{2}\right)$ avec $Y_k = C_k\omega$ et k = 1 ou 2, ce qui nous donne :

$$\underline{H}(i\omega) = \frac{\underline{V}_s}{\underline{V}_e} = \frac{1}{\left(1 - R^2Y_1Y_2\right) + 2iRY_1}$$

On en déduit le module de cette fonction de transfert :

$$\boxed{G(\omega) = \left|\underline{H}(i\omega)\right| = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - R^2Y_1Y_2\right)^2 + 4R^2Y_1^2}}}$$

2. Puis son argument $\varphi(\omega)$, tel que :

$$\boxed{\tan\varphi(\omega) = \frac{-2RY_1}{1 - R^2Y_1Y_2} \Rightarrow \varphi(\omega) = \begin{cases} -\arctan\dfrac{2RY_1}{1 - R^2Y_1Y_2} & \text{pour } R^2Y_1Y_2 \le 1 \\ -\pi - \arctan\dfrac{2RY_1}{1 - R^2Y_1Y_2} & \text{pour } R^2Y_1Y_2 > 1 \end{cases}}$$

3. On peut écrire :

$$G(\omega) = \left|\underline{H}(i\omega)\right| = \frac{1}{\sqrt{1 + 2R^2C_1C_2\omega^2\left(2\dfrac{C_1}{C_2} - 1\right) + R^4C_1^2C_2^2\omega^4}}$$

que l'on peut mettre sous la forme :

$$G(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^4}}$$

si on a :

$$\boxed{C_2 = 2C_1}$$

4. Et si on pose :

$$\boxed{\omega_0 = \frac{1}{R\sqrt{C_1C_2}} = \frac{1}{\sqrt{2}RC_1}}$$

5. Dans ces conditions la pulsation de coupure à -3dB est telle que :

$$G(dB) = 20\log G(\omega) = -10\log\left(1+\left(\frac{\omega_c}{\omega_0}\right)^4\right) = -3$$

soit :

$$\omega_c = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{2}RC_1} = 10^3\,\mathrm{rad.s^{-1}}$$

6. Pour $\omega = \omega_c = \omega_0$ on a un déphasage de la tension de sortie par rapport à la tension d'entrée :

$$\varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2}$$

7. Pour $\omega > \omega_c = \omega_0$ la forme asymptotique de $G(dB)$ est :

$$G(dB) = 20\log G(\omega) \approx -40\log\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$$

C'est une droite de pente $-40\,\mathrm{dB/décade}$.

Optique géométrique : miroir sphérique.

8. F_o et F_i sont confondus avec le milieu du segment $[CS]$; ainsi, avec la convention d'orientation choisie, on a :

$$\overline{SF_o} = \overline{SF_i} = \frac{1}{2}\overline{SC}$$

9. On utilise la relation de conjugaison avec origine au sommet S, $\frac{1}{\overline{SA_o}} + \frac{1}{\overline{SA_i}} = \frac{2}{\overline{SC}} = \frac{1}{f}$, et l'expression du grandissement transversal, $G_t = -\frac{\overline{SA_i}}{\overline{SA_o}}$. On en déduit la distance focale du miroir :

$$f = \frac{\overline{SA_o}}{1-\frac{1}{G_t}} = \frac{\overline{SC}}{2} = 2{,}5\,\mathrm{m}$$

10. La position de l'image par rapport à S est alors :

$$\overline{SA_i} = -G_t\overline{SA_o} = \frac{5}{3}\,\mathrm{m}$$

Cette image est virtuelle.

11. Ce miroir est ***convexe et divergent***.

12. Dans ce cas on a $G_t = -\frac{\overline{SA_{i1}}}{\overline{SA_{o1}}} = -1$. Il en résulte que :

$$\overline{SA_{o1}} = \overline{SC}$$

13. On évidemment :

$$\overline{SA_{i1}} = \overline{SA_{o1}} = \overline{SC}$$

Objet et image se trouvent dans le plan de front qui passe par le centre C du miroir. Ce résultat est direct dès lors que l'on sait que les plans antiprincipaux d'un miroir sphérique sont confondus avec le plan de front qui passe par le centre du miroir.

14. Dans ce cas on a $G_t = -\frac{\overline{SA_{i2}}}{\overline{SA_{o2}}} = +1$. Objet et image se trouvent dans les plans principaux qui sont confondus avec le plan de front qui passe par le sommet S du miroir. Il en résulte que :

$$\overline{SA_{o2}} = \overline{SA_{i2}} = 0$$

Conduction thermique.

15. Dans le système international la conductivité thermique λ s'exprime en $J.K^{-1}.m^{-1}.s^{-1}$.

16. En régime stationnaire, et en l'absence de terme de production, un bilan d'énergie interne - ou d'enthalpie - pendant la durée dt dans un volume élémentaire compris entre les cylindres d'axe Oz, de hauteur unité, de rayons r et $r+dr$, se traduit par :

$$2\pi\left(rj_{th}(r)-(r+dr)\,j_{th}(r+dr)\right)dt=0$$

d'où :

$$\frac{d\left(rj_{th}(r)\right)}{dr}=0\Rightarrow j_{th}(r)=\frac{A}{r}$$

Remarque. On a simplement traduit le fait que $\mathbf{j}_{th}(r)$ est à flux conservatif en régime stationnaire.

La loi de Fourier s'écrit ici $j_{th}(r)=-\lambda\frac{dT(r)}{dr}$, elle nous conduit à $dT(r)=-\frac{A}{\lambda}\frac{dr}{r}$ qui par intégration, entre les limites, du tube donne :

$$T_i-T_e=\frac{A}{\lambda}\ln\left(\frac{R_e}{R_i}\right)$$

En définitive :

$$\boxed{A=\frac{\lambda\left(T_i-T_e\right)}{\ln\left(R_e/R_i\right)}}$$

Notons que A s'exprime en $J.m^{-1}.s^{-1}$, c'est une puissance par unité de longueur.

17. Toujours à partir de $dT(r)=-\frac{A}{\lambda}\frac{dr}{r}$, on obtient :

$$\boxed{T(r)=T_i-\frac{A}{\lambda}\ln\left(\frac{r}{R_i}\right)}$$

18. La puissance thermique échangée avec le milieu extérieur au niveau de la surface cylindrique extérieure, et pour une longueur ℓ de matériau, est :

$$\boxed{\mathcal{P}_{th}=\iint_S \mathbf{j}_{th}(r).\left(dS\,\mathbf{e}_r\right)=A\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\ell}dz=2\pi A\ell}$$

Remarque. Une simple analyse dimensionnelle des résultats proposés conduit à la réponse exacte.

19. On explicite A dans la relation précédente, soit $\mathcal{P}_{th}=2\pi\ell\frac{\lambda\left(T_i-T_e\right)}{\ln\left(R_e/R_i\right)}$. On en déduit la résistance thermique d'une longueur ℓ de matériau :

$$\boxed{R_{th}=\frac{T_i-T_e}{\mathcal{P}_{th}}=\frac{\ln\left(R_e/R_i\right)}{2\pi\ell\lambda}}$$

20. En régime stationnaire la puissance dissipée par effet Joule dans le conducteur électrique est évacuée à travers la gaine. Pour une portion de conducteur de longueur ℓ on a :

$$\boxed{\mathcal{P}_{th}=\mathcal{P}_J=\left(\pi R_i^2\ell\right)\left(\rho j_e^2\right)=\frac{\rho\ell}{\pi R_i^2}I^2}$$

21. En identifiant les deux expressions de la puissance thermique :

$$\mathcal{P}_{th}=2\pi\ell\frac{\lambda\left(T_i-T_e\right)}{\ln\left(R_e/R_i\right)}=\frac{\rho\ell}{\pi R_i^2}I^2$$

on déduit la température de jonction conducteur/gaine :

$$\boxed{T_i = T_e + \frac{\rho I^2 \ln\left(R_e / R_i\right)}{2\pi^2 \lambda R_i^2}}$$

Électromécanique.

22. Le fil F, inextensible et sans masse, ne glisse pas sur la poulie solidaire de la roue (solide S). Si on note I le point de contact entre le fil et la poulie, on a à chaque instant :

$$\mathbf{V}\left(\mathrm{I},\mathsf{F}/\mathsf{S}\right) = \mathbf{V}\left(\mathrm{I},\mathsf{F}/\mathcal{R}\right) - \mathbf{V}\left(\mathrm{I},\mathcal{C}/\mathcal{R}\right) = \mathbf{0}$$

Or, $\mathbf{V}\left(\mathrm{I},\mathsf{F}/\mathcal{R}\right) = \mathbf{V}\left(\mathrm{P}/\mathcal{R}\right) = \dot{x}\,\mathbf{e}_x$ et $\mathbf{V}\left(\mathrm{I},\mathsf{S}/\mathcal{R}\right) = \boldsymbol{\omega}\left(\mathsf{S}/\mathcal{R}\right) \wedge \mathbf{OI} = b\omega(t)\mathbf{e}_x$. Il en résulte :

$$\dot{x} = b\omega(t)$$

On note $\Sigma = \mathsf{F} \cup \mathsf{S} \cup [\mathrm{P}]$ l'ensemble roue, poulie, fil et point matériel. Le moment cinétique étant une grandeur extensive on a :

$$\mathbf{L}\left(\mathrm{O},\Sigma/\mathcal{R}\right) = \mathbf{L}\left(\mathrm{O},\mathsf{S}/\mathcal{R}\right) + \mathbf{L}\left(0,[\mathrm{P}]/\mathcal{R}\right) = \mathrm{I}_{\mathrm{Oz}}\boldsymbol{\omega}\left(\mathsf{S}/\mathcal{R}\right) + \mathbf{OP} \wedge m\mathbf{V}\left(\mathrm{P}/\mathcal{R}\right)$$

soit en projection suivant Oz :

$$\boxed{L_{Oz} = \left(I_{Oz} + mb^2\right)\omega(t)}$$

23. On a un système analogue à la roue de Barlow. Il apparaît donc dans la roue, en notant N un point courant entre O et A, une f.é.m. induite :

$$e(t) = \int_{\widehat{OA}} \left(\mathbf{V}\left(\mathrm{N},\mathsf{S}/\mathcal{R}\right) \wedge \mathbf{B}\right).d\ell = \frac{1}{2}a^2 B\omega(t)$$

Si on néglige l'inductance propre du circuit, ce dernier sera parcouru par un courant induit d'intensité :

$$\boxed{i(t) = \frac{e(t)}{R} = \frac{a^2 B}{2R}\omega(t)}$$

Cette relation constitue l'équation électrique de ce système électromécanique.

24. Le moment résultant des forces de Laplace par rapport à l'axe de rotation Oz est :

$$\boxed{M_{L,Oz} = \mathbf{M}_L\left(\mathrm{O}\right).\mathbf{e}_z = \mathbf{e}_z.\int_{\widehat{OA}} \mathbf{ON} \wedge \left(i(t)d\ell \wedge \mathbf{B}\right) = -\frac{1}{2}a^2 B i(t)}$$

25. On applique le théorème du moment cinétique au système Σ par rapport à l'axe Oz dans le référentiel galiléen $\mathcal{R}$. Compte tenu que la liaison pivot est parfaite il vient :

$$\left(\frac{dL_{Oz}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = M_{L,Oz} + \left(\mathbf{OP} \wedge m\mathbf{g}\right).\mathbf{e_z}$$

soit :

$$\left(I_{Oz} + mb^2\right)\frac{d\omega(t)}{dt} = -\frac{1}{2}a^2 B i(t) + mgb$$

C'est l'équation mécanique du système.

Remarque. On peut aussi obtenir cette équation à l'aide du théorème de la puissance cinétique.

En explicitant i(t) on obtient l'équation différentielle à laquelle satisfait ω(t) :

$$\frac{d\omega(t)}{dt} + \frac{a^4 B^2}{4R\left(I_{Oz} + mb^2\right)}\omega(t) = \frac{mgb}{\left(I_{Oz} + mb^2\right)}$$

En identifiant avec l'équation différentielle proposée dans l'énoncé il vient :

$$\boxed{\alpha = \frac{a^4 B^2}{4R\left(I_{Oz} + mb^2\right)}}$$

26. Et :

$$\boxed{\beta = \frac{-mgb}{\left(I_{Oz} + mb^2\right)}}$$

27. Seule l'équation électrique est modifiée et devient :

$$i(t) = \frac{E_0 + e(t)}{R}$$

L'équation différentielle à laquelle obéit la vitesse angulaire ω(t) est alors :

$$\left(I_{Oz} + mb^2\right)\frac{d\omega(t)}{dt} + \frac{B^2a^4}{4R}\omega(t) = mgb - \frac{Ba^2E_0}{2R}$$

Quand le régime permanent est atteint l'accélération angulaire est nulle et la vitesse angulaire vaut :

$$\boxed{\omega_0 = 4\frac{mgbR}{B^2a^4} - 2\frac{E_0}{Ba^2}}$$

28. La roue tournera dans le sens rétrograde si $\omega_0 < 0$, soit pour :

$$\boxed{E_0 > E_{0\min} = \frac{2mgbR}{Ba^2}}$$

Mouvement à force centrale.

29. Le champ électrique entre les électrodes est radial et de la forme $\mathbf{E} = E(r)\mathbf{e}_r = \frac{V_0}{r}\mathbf{e}_r$. Il est lié au potentiel par $-dV = E(r)dr = V_0\frac{dr}{r}$. L'armature externe du condensateur, reliée à la terre, a un potentiel nul ; celui de l'armature interne est alors tel que :

$$V_1 = V_0 \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

Ainsi :

$$\boxed{V_0 = \frac{V_1}{\ln\left(R_2/R_1\right)}}$$

30. On applique la deuxième loi de Newton à un électron dans le référentiel lié au condensateur et supposé galiléen. Comme on néglige le poids de l'électron devant la force électrique à laquelle il est soumis, il vient :

$$m\mathbf{a}\left(M/\mathcal{R}\right) = -e\,\mathbf{E} = -\frac{eV_0}{r}\mathbf{e}_r$$

L'accélération de l'électron est telle que $\mathbf{a}\left(M/\mathcal{R}\right) = \left(\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right)\mathbf{e}_r + \left(2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} - r\frac{d^2\theta}{dt^2}\right)\mathbf{e}_\theta$; ainsi, en projection suivant $\mathbf{e}_r$, l'équation du mouvement de l'électron est :

$$\boxed{\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = -\frac{eV_0}{mr}}$$

31. En projection suivant $\mathbf{e}_\theta$ on obtient :

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right) = 0}$$

Cette relation équivaut à la conservation du moment cinétique.

32. Pour que la trajectoire de l'électron soit un cercle de rayon r_0, il faut que la vitesse soit, à chaque instant, normale au rayon vecteur. De la relation obtenue à la question 31 on déduit :

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{v_0}{r_0} = \text{Cte}$$

En reportant dans l'équation de la question 30 il vient :

$$v_0 = \sqrt{\frac{eV_0}{m}}$$

Comme la vitesse initiale doit être orthogonale à $\mathbf{OS} = r_0\mathbf{e}_x$ on a en définitive :

$$\boxed{\mathbf{v}_0 = \sqrt{\frac{eV_0}{m}}\,\mathbf{e}_y}$$

33. On pose $r = r_0 + \delta$ avec $|\delta| \ll r_0$ qui correspond à une trajectoire voisine du cercle de rayon r_0.
La conservation du moment cinétique conduit alors, au premier ordre, à :

$$\boxed{\frac{d\theta}{dt} = \omega_0\left(1+\frac{\delta}{r_0}\right)^{-2} \approx \omega_0\left(1-2\frac{\delta}{r_0}\right)}$$

34. La première équation s'écrit alors :

$$\frac{d^2\delta}{dt^2} - r_0\left(1+\frac{\delta}{r_0}\right)\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = -r_0\omega_0^2\left(1+\frac{\delta}{r_0}\right)^{-1}$$

soit encore, en utilisant la conservation du moment cinétique :

$$\frac{d^2\delta}{dt^2} - r_0\omega_0^2\left(1+\frac{\delta}{r_0}\right)\left(1-2\frac{\delta}{r_0}\right)^2 = -r_0\omega_0^2\left(1+\frac{\delta}{r_0}\right)^{-1}$$

On obtient alors au premier ordre :

$$\boxed{\frac{d^2\delta}{dt^2} + 2\omega_0^2\delta = 0}$$

$\delta(t)$ a une variation sinusoïdale, cela signifie que la particule est rappelée vers sa trajectoire circulaire qui est donc stable.

Réflexion d'une onde électromagnétique sur un conducteur parfait.

35. L'onde réfléchie, plane, progressive, harmonique, a même fréquence que l'onde incidente car le milieu conducteur est immobile dans le référentiel d'étude ; il en résulte que son vecteur d'onde est tel que $\mathbf{k}_r = -\mathbf{k}_i = -k\,\mathbf{e}_x$.
Par ailleurs, le champ électrique étant nul dans un conducteur parfait, la continuité de la composante tangentielle du champ électrique dans le plan x = 0 se traduit par $\mathbf{e}_x \wedge \left(\mathbf{E}_i + \mathbf{E}_r\right)_{x=0} = \mathbf{0}$.
En définitive on obtient :

$$\boxed{\mathbf{E}_r = \begin{cases} 0 \\ -E_{Oy}\cos(-kx-\omega t) \\ -E_{Oz}\cos(-kx-\omega t+\varphi) \end{cases}}$$

36. L'onde incidente est plane et progressive ; le champ magnétique associé est donc tel que :

$$\boxed{\mathbf{B}_i = \frac{k}{\omega}\left(\mathbf{e}_x \wedge \mathbf{E}_i\right) = \frac{1}{c}\left(\mathbf{e}_x \wedge \mathbf{E}_i\right) = \begin{cases} 0 \\ -\dfrac{E_{Oz}}{c}\cos(kx-\omega t+\varphi) \\ \dfrac{E_{Oy}}{c}\cos(kx-\omega t) \end{cases}}$$

37. Pour l'onde réfléchie, qui est aussi plane et progressive, il vient :

$$\mathbf{B}_r = \frac{-k}{\omega}\left(\mathbf{e}_x \wedge \mathbf{E}_r\right) = \frac{-1}{c}\left(\mathbf{e}_x \wedge \mathbf{E}_r\right) = \begin{cases} 0 \\ -\dfrac{E_{Oz}}{c}\cos\left(-kx - \omega t + \varphi\right) \\ \dfrac{E_{Oy}}{c}\cos\left(-kx - \omega t\right) \end{cases}$$

38. Le champ magnétique total, dans le demi-espace x < 0, est alors :

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_i + \mathbf{B}_r = \begin{cases} 0 \\ -\dfrac{2E_{Oz}}{c}\cos\left(\varphi - \omega t\right)\cos\left(kx\right) \\ \dfrac{2E_{Oy}}{c}\cos\left(\omega t\right)\cos\left(kx\right) \end{cases}$$

39. Le champ électrique n'a pas de composante normale au plan x = 0 donc il n'y a aucune charge surfacique sur le conducteur.

$$\sigma = 0$$

40. Le champ magnétique est uniquement tangentiel. Sa discontinuité à la traversée du plan conducteur x = 0 est liée à la présence d'un courant surfacique de densité $\mathbf{j}_s$ telle que :

$$\mathbf{j}_s = \frac{1}{\mu_0}\mathbf{e}_x \wedge \left(\mathbf{B}\left(0^+, t\right) - \mathbf{B}\left(0^-, t\right)\right) = \frac{2}{\mu_0 c}\begin{cases} 0 \\ E_{Oy}\cos\left(\omega t\right) \\ E_{Oz}\cos\left(\omega t - \varphi\right) \end{cases}$$

Remarque. Ce courant superficiel se trouvant dans le plan x = 0 sa densité ne peut être fonction de x ce qui permet de conclure que tous les résultats proposés sont faux.

-:-:-:-:-