ICNA - SESSION 2008
ÉPREUVE COMMUNE DE PHYSIQUE
CORRIGÉ

Câble coaxial.

1. L'intensité I du courant stationnaire qui circule dans l'âme et la gaine du câble coaxial est telle que :

$$I = \iint_{S_1} (J_1 \mathbf{e}_z).(dS\mathbf{e}_z) = \iint_{S_2} (J_2 \mathbf{e}_z).(-dS\mathbf{e}_z)$$

Les densités volumiques de courant étant supposées uniformes il vient :

$$\mathbf{J}_1 = J_1\mathbf{e}_z = \frac{I}{\pi R_1^2}\mathbf{e}_z \quad \text{et} \quad \mathbf{J}_2 = J_2\mathbf{e}_z = \frac{-I}{\pi\left(R_3^2 - R_2^2\right)}\mathbf{e}_z$$

On observe que :

$$\boxed{R_1^2 \left\|\mathbf{J}_1\right\| = \left(R_3^2 - R_2^2\right)\left\|\mathbf{J}_2\right\|}$$

2. On suppose le câble infiniment long. Sous cette hypothèse toute rotation autour de l'axe z'z et toute translation parallèlement à cet axe laisse la distribution de courant invariante ; on a donc :

$$\mathbf{B}(M) = \mathbf{B}(\rho) \quad \text{et} \quad \mathbf{A}(M) = \mathbf{A}(\rho)$$

où ρ est la distance du point considéré à l'axe de révolution.
Par ailleurs tout plan contenant l'axe z'z est plan de symétrie pour la distribution de courant, alors que tout plan orthogonal à z'z est plan d'antisymétrie. Le potentiel-vecteur, vecteur vrai, et le champ magnétique, pseudo-vecteur, sont donc tels que :

$$\boxed{\mathbf{B}(M) = \mathbf{B}(\rho) = B(\rho)\mathbf{e}_\varphi \quad \text{et} \quad \mathbf{A}(M) = \mathbf{A}(\rho) = A(\rho)\mathbf{e}_z}$$

3. On détermine le champ magnétique à l'aide du théorème d'Ampère appliqué à un contour circulaire C d'axe z'z et de rayon $\rho < R_1$. Il vient :

$$2\pi\rho B(\rho < R_1) = \mu_0 \pi \rho^2 J_1 = \mu_0 I \frac{\rho^2}{R_1^2}$$

d'où on déduit :

$$\boxed{B(\rho < R_1) = \frac{1}{2}\mu_0 J_1 \rho = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\frac{\rho}{R_1^2}}$$

Pour déterminer le potentiel-vecteur dans le même domaine on peut utiliser l'une des deux méthodes suivantes.

a) A partir de la relation locale $\mathbf{B} = \mathbf{rot}\,\mathbf{A}$ qui, avec $\mathbf{rot}(f\,\mathbf{U}) = f.(\mathbf{rot}\,\mathbf{U}) + \mathbf{grad}\,f \wedge \mathbf{U}$, nous conduit à $B(\rho) = -\dfrac{dA(\rho)}{d\rho}$. Par intégration, compte tenu de $A(0) = 0$, on obtient :

$$\boxed{A(\rho < R_1) = -\frac{\mu_0 J_1 \rho^2}{4} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{\rho^2}{R_1^2}}$$

b) A partir de la forme intégrale $\iint_S \mathbf{B}.d\mathbf{S} = \oint_C \mathbf{A}.d\boldsymbol{\ell}$. C est un contour rectangulaire contenu dans le plan vertical $(O,\mathbf{e}_\rho,\mathbf{e}_z)$ de normale $\mathbf{e}_\varphi$. Les côtés verticaux ont une longueur unité, l'un est sur l'axe Oz et l'autre à la distance $\rho < R_1$ du précédent. On obtient ainsi :

$$A(0) - A(\rho < R_1) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{\rho^2}{R_1^2} = \frac{\mu_0 J_1 \rho^2}{4}$$

soit le même résultat que précédemment puisque $A(0)=0$.

4. Pour $R_1<\rho<R_2$, par les mêmes techniques que précédemment et compte tenu de la continuité du potentiel-vecteur pour $\rho=R_1$, on obtient :

$$\boxed{B(R_1<\rho<R_2)=\frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}=\frac{\mu_0 J_1 R_1^2}{2\rho}}$$

$$\boxed{A(R_1<\rho<R_2)=-\frac{\mu_0 I}{2\pi}\left(\ln\left(\frac{\rho}{R_1}\right)+\frac{1}{2}\right)=-\frac{\mu_0 J_1 R_1^2}{2}\left(\ln\left(\frac{\rho}{R_1}\right)+\frac{1}{2}\right)}$$

5. Toujours selon la même démarche il vient, pour $R_2<\rho<R_3$:

$$\boxed{B(R_2<\rho<R_3)=\frac{\mu_0 I}{2\pi\left(R_3^2-R_2^2\right)}\left(\frac{R_3^2}{\rho}-\rho\right)}$$

$$\boxed{A(R_2<\rho<R_3)=-\frac{\mu_0 I}{2\pi}\left(\frac{R_3^2}{R_3^2-R_2^2}\ln\left(\frac{\rho}{R_2}\right)+\frac{R_3^2-\rho^2}{2\left(R_3^2-R_2^2\right)}+\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)\right)}$$

6. Enfin, pour $\rho>R_3$, on obtient :

$$\boxed{B(\rho>R_3)=0} \qquad \boxed{A(\rho>R_3)=-\frac{\mu_0 I}{2\pi}\left(\frac{R_3^2}{R_3^2-R_2^2}\ln\left(\frac{R_3}{R_2}\right)+\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)\right)}$$

7. Le phénomène d'induction électromagnétique se manifeste lorsqu'on plonge un conducteur immobile dans un champ magnétique variable (*cas de Neumann*). Ce phénomène apparaît dans le conducteur mais, par ses effets, il affecte aussi l'environnement du conducteur.

8. Le champ magnétique, variable au cours du temps, engendre un champ électrique qui est le champ de Neumann défini par la relation : $\mathbf{E}=-\dfrac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$.

Avec les résultats précédents et compte tenu que $i(t)=I_0\cos(\omega t)$, donc $\dfrac{di(t)}{dt}=-I_0\omega\sin(\omega t)$, on obtient :

$$\boxed{E(\rho<R_1)=-\frac{\mu_0 I_0\omega}{4\pi}\frac{\rho^2}{R_1^2}\sin(\omega t)} \qquad \boxed{E(R_1<\rho<R_2)=-\frac{\mu_0 I_0\omega}{2\pi}\left(\ln\left(\frac{\rho}{R_1}\right)+\frac{1}{2}\right)\sin(\omega t)}$$

$$\boxed{E(R_2<\rho<R_3)=\frac{\mu_0}{4\pi}\left(\frac{2R_3^2}{R_3^2-R_2^2}\ln\left(\frac{\rho}{R_2}\right)+\frac{R_3^2-\rho^2}{R_3^2-R_2^2}+2\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)\right)\frac{di(t)}{dt}}$$

$$\boxed{E(\rho>R_3)=\frac{\mu_0}{2\pi}\left(\frac{R_3^2}{R_3^2-R_2^2}\ln\left(\frac{R_3}{R_2}\right)+\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)\right)\frac{di(t)}{dt}}$$

Notons que les expressions de **E** sont celles de **A** dans lesquelles on a remplacé I par $-\dfrac{di(t)}{dt}=I_0\omega\sin(\omega t)$.

9. La puissance électrique dissipée par effet Joule ne concerne que les conducteurs c'est-à-dire l'âme et la gaine du câble coaxial.

10. La puissance instantanée dissipée par effet Joule, pour une longueur unité de câble, est :

$$p_J(t)=p_{J,\text{âme}}(t)+p_{J,\text{gaine}}(t)$$

soit :

$$\boxed{p_J(t) = 2\pi\gamma\left(\int_0^{R_1} E^2(\rho < R_1)\rho\, d\rho + \int_{R_2}^{R_3} E^2(R_2 < \rho < R_3)\rho\, d\rho\right) = C\sin^2(\omega t)}$$

Il en résulte une moyenne temporelle :

$$\boxed{\mathcal{P}_J = \langle p_J(t)\rangle_t = \frac{C}{2}}$$

Équilibres de l'atmosphère terrestre.

11. Les seules forces qui agissent sur le fluide sont les forces de pression et de pesanteur. La relation fondamentale de la statique nous conduit, le champ de pesanteur étant supposé uniforme, à :

$$\boxed{\frac{dp(z)}{dz} = -\rho(z)g}$$

Par ailleurs, la dérivée logarithmique de l'équation d'état des gaz parfaits, $p(z) = r\rho(z)T(z)$, conduit à :

$$\frac{1}{p(z)}\frac{dp(z)}{dz} = \frac{1}{\rho(z)}\frac{d\rho(z)}{dz} + \frac{1}{T(z)}\frac{dT(z)}{dz}$$

De ces deux relations on déduit :

$$\boxed{\frac{1}{\rho(z)}\frac{d\rho(z)}{dz} + \frac{1}{T(z)}\frac{dT(z)}{dz} = -g\frac{\rho(z)}{p(z)} = -\frac{g}{rT(z)}}$$

12. On suppose que l'atmosphère est isotherme à la température T_0. On a donc :

$$\frac{1}{p(z)}\frac{dp(z)}{dz} = -\frac{g}{rT_0}$$

qui s'intègre en :

$$\boxed{p(z) = p(0)\exp\left(-\frac{gz}{rT_0}\right)}$$

13. On considère maintenant que l'atmosphère est en équilibre adiabatique à toute altitude. On a $p(z) = k\rho^\gamma(z)$, soit $\rho^{\gamma-1}(z) = k'T(z)$, d'où on déduit :

$$\frac{1}{\rho(z)}\frac{d\rho(z)}{dz} = \frac{1}{(\gamma-1)T(z)}\frac{dT(z)}{dz}$$

En utilisant la relation $\frac{1}{\rho(z)}\frac{d\rho(z)}{dz} + \frac{1}{T(z)}\frac{dT(z)}{dz} = -\frac{g}{rT(z)}$, on obtient :

$$\frac{dT(z)}{dz} = \frac{1-\gamma}{\gamma}\frac{g}{r}$$

Compte tenu que $T(0) = T_0$, il vient :

$$\boxed{T(z) = T_0\left(1 + \frac{1-\gamma}{\gamma}\frac{gz}{rT_0}\right)}$$

Remarque. Les simplifications suggérées dans l'énoncé, pour cette question, ne sont d'aucune utilité.

Diffusion thermique.

14. En régime stationnaire la densité volumique de courant thermique, $\mathbf{j}(r) = j(r)\mathbf{e}_r$, est à flux conservatif. On a donc, au niveau de toute surface sphérique de centre O et de rayon $r > R$:

$$\Phi = 4\pi r^2 j(r) = \text{Cte}$$

La continuité du flux thermique à la surface de la sphère solide de centre O et de rayon R nous permet d'exprimer la constante, soit :

$$\Phi = 4\pi r^2 j(r) = \frac{4}{3}\pi R^3 P$$

En définitive il vient :

$$\boxed{j(r) = \frac{PR^3}{3r^2}}$$

15. D'après la loi de Fourier on a :

$$j(r) = \frac{PR^3}{3r^2} = -\lambda \frac{dT(r)}{dr}$$

Compte tenu que $\lim\limits_{r\to+\infty} T(r) = T_\infty$, cette relation s'intègre en :

$$\boxed{T(r) = T_\infty + \frac{PR^3}{3\lambda r}}$$

16. Avec $\Phi = \frac{4}{3}\pi R^3 P$ on peut écrire $T(r) = T_\infty + \frac{\Phi}{4\pi\lambda r}$. Ainsi, la résistance thermique, pour une portion de fluide entre deux sphères concentriques de rayons r_1 et $r_2 > r_1$, est :

$$\boxed{R_{th} = \frac{T(r_1) - T(r_2)}{\Phi} = \frac{1}{4\pi\lambda}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)}$$

Évolutions d'un gaz parfait.

17. L'état initial A du système est caractérisé par :

$$T_A = T_{atm} \quad , \quad p_A = p_{atm} + \frac{M_p g}{S} \quad , \quad V_A = mr\frac{T_A}{p_A}$$

Le piston étant bloqué, on met le système en contact thermique avec une source de température T_S. Au cours de la transformation il n'y a pas d'équilibre thermique puisque les températures du gaz et de la source sont différentes : l'évolution, isochore, est donc irréversible.
Dans l'état final B on a :

$$T_B = T_S \quad , \quad p_B = p_A \frac{T_S}{T_{atm}} \quad , \quad V_B = V_A$$

La variation d'entropie entre les états A et B peut se calculer - l'entropie étant une fonction d'état - sur la transformation isochore réversible qui conduit du même état initial au même état final. Avec le couple de variables (T,V) il vient :

$$\boxed{\Delta S_{AB} = \frac{mr}{\gamma-1}\int_{T_{atm}}^{T_S} \frac{dT}{T} = \frac{mr}{\gamma-1}\ln\left(\frac{T_S}{T_{atm}}\right)}$$

18. Au cours de cette évolution le gaz reçoit de la source une entropie :

$$S_r = \int \frac{\delta Q}{T_S} = \frac{mr}{(\gamma-1)T_S}\int_{T_{atm}}^{T_S} dT = \frac{mr}{\gamma-1}\frac{T_S - T_{atm}}{T_S}$$

L'entropie produite au cours de la transformation AB est donc :

$$\boxed{S_p = \Delta S_{AB} - S_r = \frac{mr}{\gamma-1}\left(\ln\left(\frac{T_S}{T_{atm}}\right) - \frac{T_S - T_{atm}}{T_S}\right)}$$

On vérifie aisément que cette quantité est positive.

19. Pour que le piston reste immobile après suppression du blocage mécanique il faut déposer sur celui-ci une masse M telle que :

$$Mg = S(p_B - p_A)$$

soit :

$$\boxed{M = \left(\frac{p_{atm}S}{g} + M_p\right)\left(\frac{T_S}{T_{atm}} - 1\right)}$$

20. Dans l'état final C le gaz est caractérisé par $\left(T_C, V_C, p_C = p_A\right)$. L'évolution est adiabatique irréversible donc :

$$\Delta U_{BC} = W_{BC}$$

avec :

- $\Delta U_{BC} = \dfrac{mr}{\gamma - 1}\left(T_C - T_S\right)$ car un gaz parfait suit la première loi de Joule
- $W_{BC} = p_A\left(V_B - V_C\right) = p_A\left(V_A - V_C\right) = mr\left(T_{atm} - T_C\right)$

Il en résulte que :

$$\boxed{T_C = \frac{T_S}{\gamma} + \frac{\gamma - 1}{\gamma}T_{atm}}$$

Notons que, la transformation étant irréversible, on ne peut pas utiliser la loi de Laplace.

Optique géométrique : associations de lentilles minces.

21. La lentille mince convergente L_1 donne de l'objet A_1B_1, placé dans son plan focal objet ($A_1 = F_1$), une image à l'infini, réelle et renversée.

22. On a $A_1 = F_1 \xrightarrow{L_1} A'_1 = \infty = A_2 \xrightarrow{L_2} A'_2 = F'_2$, donc :

$$\boxed{p'_2 = f_2}$$

Si on note α l'angle sous lequel on voit $A'_1B'_1 = A_2B_2$, alors on a :

$$\tan\alpha = -\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{O_1F_1}} = -\frac{\overline{A'_2B'_2}}{\overline{O_2F'_2}}$$

Cette association de lentilles minces convergentes présente donc un grandissement transversal total :

$$\boxed{\left(G_t\right)_{total} = \frac{\overline{A'_2B'_2}}{\overline{A_1B_1}} = \frac{\overline{O_2F'_2}}{\overline{O_1F_1}} = -\frac{f_2}{f_1} = -1}$$

Notons que la lentille L_2 donne de l'objet virtuel $A'_1B'_1 = A_2B_2$, situé à l'infini, une image réelle droite.

23. On place maintenant, dans le plan focal objet de L_2, une lentille mince divergente L_3, de focale f_3 telle que $|f_3| > f_2$. Dans ce cas nous avons :

$$A_1 = F_1 \xrightarrow{L_1} A'_1 = \infty = A_3 \xrightarrow{L_3} A'_3 = F'_3 \xrightarrow{L_2} A'_2$$

Il en résulte que :

$$\boxed{p_3 = +\infty \quad , \quad p'_3 = f_3 < 0 \quad , \quad p_2 = \overline{O_2F'_3} = \overline{O_2F_2} + \overline{O_3F'_3} = f_3 - f_2 < 0 \quad , \quad p'_2 = \frac{f_2\left(f_3 - f_2\right)}{f_3} > 0}$$

Notons que L_3 donne d'un objet virtuel une image virtuelle renversée.

24. Pour le montage (1) nous avons $\left(p'_2\right)_1 = f_2$, alors que pour le montage (2) nous obtenons $\left(p'_2\right)_2 = f_2 - \dfrac{f_2^2}{f_3} > f_2$. Pour visualiser l'image finale réelle il faut donc déplacer l'écran de :

$$\boxed{D_1 = \left(p'_2\right)_2 - \left(p'_2\right)_1 = \frac{f_2^2}{|f_3|} = +11,25\,\text{cm}}$$

Le grandissement transversal de la lentille L_2 est :

$$\boxed{\left(G_t\right)_2 = \frac{p'_2}{p_2} = \frac{f_2}{f_3} = -\frac{3}{4}}$$

L'image finale est renversée par rapport à l'objet A_1B_1.

25. Numériquement on a :

$$\boxed{p_2 = -35\,\text{cm} \quad , \quad p'_2 = +26,25\,\text{cm}}$$

26. On remplace la lentille divergente L_3 par une lentille convergente L_4 de focale $f_4 = \frac{1}{V_4} = 20\,\text{cm}$.

Dans cette situation nous avons :

$$A_1 = F_1 \xrightarrow{L_1} A'_1 = \infty = A_4 \xrightarrow{L_4} A'_4 = F'_4 \xrightarrow{L_2} A'_2$$

La lentille convergente L_4 donne de l'objet virtuel $A'_1B'_1 = A_4B_4$, situé à l'infini, une image réelle droite telle que $p'_4 = f_4 > f_2 = \overline{F_2O_2} = \overline{O_4O_2}$.

Cette image réelle sert d'objet virtuel à L_2 - car $p_2 = \overline{O_2A_2} = \overline{O_2A'_4} = \overline{O_2F'_4} = f_4 - f_2 > 0$ - qui en donne une image réelle droite telle que $p'_2 = f_2\left(1 - \frac{f_2}{f_4}\right) > 0$.

Notons que l'ensemble $\left(L_2 \cup L_4\right)$ ne peut pas être afocal car F'_4 ne coïncide pas avec F_2.

27. Pour observer l'image finale il faut déplacer l'écran de :

$$\boxed{D_2 = \left(p'_2\right)_3 - \left(p'_2\right)_1 = -\frac{f_2^2}{f_4} = -11,25\,\text{cm}}$$

Le grandissement transversal de la lentille L_2 est alors :

$$\boxed{\left(G_t\right)_2 = \frac{p'_2}{p_2} = \frac{f_2}{f_4} = +\frac{3}{4}}$$

L'image finale est de même sens que l'objet A_1B_1.

28. On remplace la lentille convergente L_4 par une autre lentille convergente L_5 mais de focale $f_5 = \frac{1}{V_5} = 10\,\text{cm} = \frac{f_4}{2}$.

Dans cette situation nous avons :

$$A_1 = F_1 \xrightarrow{L_1} A'_1 = \infty = A_5 \xrightarrow{L_5} A'_5 = F'_5 \xrightarrow{L_2} A'_2$$

La lentille convergente L_5 donne de l'objet virtuel $A'_1B'_1 = A_4B_4$, situé à l'infini, une image réelle droite telle que $p'_5 = f_5 < f_2 = \overline{F_2O_2} = \overline{O_5O_2}$.

Cette image réelle sert d'objet réel à L_2 - car $p_2 = \overline{O_2A_2} = \overline{O_2A'_5} = \overline{O_2F'_5} = f_5 - f_2 < 0$ - qui en donne une image virtuelle droite telle que $p'_2 = f_2\left(1 - \frac{f_2}{f_5}\right) < 0$.

Notons que l'ensemble $\left(L_2 \cup L_5\right)$ ne peut pas être afocal car F'_5 ne coïncide pas avec F_2.

29. Une image virtuelle ne peut pas être observée sur un écran.

Le grandissement transversal de la lentille L_2 est alors :

$$\boxed{\left(G_t\right)_2 = \frac{p'_2}{p_2} = \frac{f_2}{f_5} = +\frac{3}{2}}$$

Mouvement d'une plaque solide plane.

30. Le théorème d'Huygens nous conduit à :

$$\boxed{I_O = I_G + M\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}Ma^2}$$

Remarque. Ce théorème n'est plus au programme des CPGE depuis 1997.

31. Pour déterminer l'équation différentielle en φ du mouvement de la plaque dans $\mathcal{R}_0$ on peut utiliser, au choix :

♦ le théorème du moment cinétique en projection suivant l'axe de rotation Δ = Oy ;
♦ le théorème de la puissance cinétique ;
♦ la conservation de l'énergie mécanique car, la liaison pivot étant supposée parfaite, seul le poids, qui dérive d'une énergie potentielle, développe une puissance non nulle au cours du mouvement.

L'énergie cinétique de la plaque $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{R}_0$ est :

$$E_c = \frac{1}{2}J_O\dot{\varphi}^2 = \frac{1}{6}Ma^2\dot{\varphi}^2$$

La puissance développée par les forces extérieures se réduit à celle du poids, soit :

$$\mathcal{P}_{ext} = -M\mathbf{g}.\mathbf{V}\left(G,\mathcal{P}/\mathcal{R}_0\right) = \frac{1}{2}Mga\dot{\varphi}\sin\varphi$$

Le théorème de la puissance cinétique, $\frac{dE_c}{dt} = \mathcal{P}_{ext}$, nous conduit alors, compte tenu que $\dot{\varphi}$ n'est pas identiquement nul, à :

$$\boxed{\ddot{\varphi} - \frac{3}{2}\frac{g}{a}\sin\varphi = 0}$$

32. L'énergie cinétique de la plaque dans $\mathcal{R}_0$ vient d'être calculer, soit :

$$\boxed{E_c = \frac{1}{2}J_O\dot{\varphi}^2 = \frac{1}{6}Ma^2\dot{\varphi}^2}$$

L'énergie potentielle de pesanteur E_p est telle que :

$$\mathcal{P}_{ext} = -M\mathbf{g}.\mathbf{V}\left(G,\mathcal{P}/\mathcal{R}_0\right) = \frac{1}{2}Mga\dot{\varphi}\sin\varphi = -\frac{dE_p}{dt}$$

Sachant que l'énergie potentielle de référence correspond à $\varphi = 0$, on en déduit :

$$\boxed{E_p = \frac{1}{2}Mga\left(\cos\varphi - 1\right)}$$

33. Les positions d'équilibre de la plaque correspondent aux valeurs $\varphi = \varphi_e$ telles que :

$$\left(\frac{dE_p}{d\varphi}\right)_{\varphi_e} = -\frac{1}{2}Mga\sin\varphi_e = 0$$

soit :

$$\boxed{\varphi_e = 0 \text{ ou } \pi}$$

On en déduit leur nature :

$$\boxed{\left(\frac{d^2E_p}{d\varphi^2}\right)_{\varphi_e} = -\frac{1}{2}Mga\cos\varphi_e \begin{cases} < 0 \text{ pour } \varphi_e = 0 \Rightarrow \text{instable} \\ > 0 \text{ pour } \varphi_e = \pi \Rightarrow \text{stable} \end{cases}}$$

34. Pour étudier les petites oscillations au voisinage de la position d'équilibre stable de la plaque on linéarise l'équation différentielle obtenue à la question 31 en posant $\varphi = \pi + \varepsilon$ $\left(\varepsilon \text{ petit}\right)$. Il en résulte :

$$\boxed{\ddot{\varepsilon} + \frac{3g}{2a}\varepsilon = 0 \text{ ou } \ddot{\varphi} + \frac{3g}{2a}\left(\varphi - \pi\right) = 0}$$

35. Nous avons obtenu l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique de pulsation propre :

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{3g}{2a}}}$$

Le théorème de la résultante dynamique appliqué à la plaque dans $\mathcal{R}_0$ se traduit par :

$$M\mathbf{a}\left(G,\mathcal{P}/\mathcal{R}_0\right)=\mathbf{R}+M\mathbf{g}$$

avec, dans le cadre de l'approximation précédente :

$$\mathbf{a}\left(G,\mathcal{P}/\mathcal{R}_0\right)=\frac{a}{2}\left(\ddot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi-\dot{\varphi}^2\mathbf{e}_r\right)\approx-\frac{a}{2}\ddot{\varepsilon}\mathbf{e}_{x0}=3g\,\varepsilon\,\mathbf{e}_{x0}$$

Il en résulte que :

$$\boxed{\mathbf{R}=Mg\left(\mathbf{e}_{z0}+3\varepsilon\mathbf{e}_{x0}\right)}$$

où $\varepsilon(t)$ est une fonction sinusoïdale de pulsation ω.

36. On considère que l'épaisseur de la plaque est petite devant ses autres dimensions. La plaque subit, de la part de l'eau, la poussée d'Archimède :

$$\Pi=\rho_{eau}\left(\frac{beh}{\cos\varphi}\right)\mathbf{g}$$

Or, $\rho_{eau}=\frac{\rho_{plaque}}{d}=\frac{M}{dV}=\frac{M}{deab}$, il en résulte :

$$\boxed{\Pi=Mg\frac{h}{ad\cos\varphi}\mathbf{e}_{z0}}$$

On néglige la poussée d'Archimède due à l'air.

37. Le centre de poussée est le centre d'inertie du volume de fluide déplacé. Il correspond au centre de masse du solide immergé si celui-ci est homogène. C'est évidemment le cas ici, d'où :

$$\boxed{OP=\frac{h}{2\cos\varphi}}$$

38. L'équilibre de la plaque est réalisé lorsque le moment résultant en O des forces extérieures appliquées est nul ce qui se traduit, en notant I le milieu du segment [CD] , par:

$$\mathbf{OI}\wedge\mathbf{F}+\mathbf{OG}\wedge M\mathbf{g}+\mathbf{OP}\wedge\Pi=\mathbf{0}$$

On en déduit :

$$\boxed{F=\frac{Mg}{2}\left(\frac{h^2}{a^2d\cos^2\varphi_{éq}}-1\right)\tan\varphi_{éq}}$$

39. On a F = 0 et, comme la plaque n'est jamais totalement immergée, $0\le|\varphi|<\varphi_{lim}<\frac{\pi}{2}$ avec $\cos\varphi_{lim}=\frac{h}{a}<1$. L'équation :

$$\left(\frac{h^2}{a^2d\cos^2\varphi_{éq}}-1\right)\tan\varphi_{éq}=0$$

nous montre qu'il y a trois positions d'équilibre qui sont :

$$\boxed{\varphi_{éq}=0,\pm\varphi_0\ \text{avec}\ \cos\varphi_0=\frac{h}{a\sqrt{d}}<1}$$

Si on écarte légèrement la plaque de sa position d'équilibre le moment résultant des forces appliquées, par rapport à l'axe de rotation $\Delta=(Oy_0)$, prend la valeur :

$$dM(\Delta)=\frac{Mga}{2}\left(\left(1-\frac{h^2}{a^2d\cos^2\varphi}-\frac{2h^2}{a^2d}\frac{\tan^2\varphi}{\cos^2\varphi}\right)\cos\varphi\right)_{\varphi_{éq}}d\varphi$$

L'équilibre est stable si $dM(\Delta)$ tend à ramener le système dans sa position d'équilibre, c'est-à-dire si $\frac{dM(\Delta)}{d\varphi}<0$; dans le cas contraire l'équilibre est instable.

Ainsi :

$$\frac{dM(\Delta)}{d\varphi} = \begin{cases} \dfrac{Mga}{2}\left(1 - \dfrac{h^2}{a^2 d}\right) > 0 \text{ pour } \varphi_{éq} = 0 \Rightarrow \text{instable} \\ -\dfrac{Mgh}{\sqrt{d}}\left(\dfrac{a^2 d}{h^2} - 1\right) < 0 \text{ pour } \varphi_{éq} = \pm\varphi_0 \Rightarrow \text{stable} \end{cases}$$

40. Les résultats sont donnés dans la question précédente.

-:-:-:-:-