ICNA - SESSION 2008
ÉPREUVE OPTIONNELLE DE PHYSIQUE
CORRIGÉ

Cerceau lesté.

1. Condition de roulement sans glissement du cerceau sur l'axe Ox :

$$\mathbf{V}(\mathrm{I},\mathcal{C}/\mathcal{R}) = \mathbf{V}(\mathrm{C},\mathcal{C}/\mathcal{R}) + \boldsymbol{\omega}(\mathcal{C}/\mathcal{R}) \wedge \mathbf{CI} = \dot{x}\,\mathbf{e}_x + (\dot{\theta}\,\mathbf{e}_z) \wedge (-a\,\mathbf{e}_y) = \mathbf{0}$$

soit :

$$\dot{x} + a\dot{\theta} = 0$$

Avec les conditions initiales imposées, $x(0) = 0$ et $\theta(0) = 0$, la relation précédente s'intègre en :

$$\boxed{x + a\theta = 0}$$

2. L'énergie cinétique du cerceau dans $\mathcal{R}$ est, d'après le théorème de Koenig :

$$\mathcal{E}_c(\mathcal{C}) = \frac{1}{2}m\mathbf{V}^2(\mathrm{C},\mathcal{C}/\mathcal{R}) + \frac{1}{2}J(\mathcal{C})\omega^2(\mathcal{C}/\mathcal{R}) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}ma^2\dot{\theta}^2$$

Compte tenu de la condition de roulement sans glissement il vient :

$$\boxed{\mathcal{E}_c(\mathcal{C}) = m\dot{x}^2 \ \left(\text{ou } ma\dot{\theta}^2\right)}$$

Remarque. La connaissance et/ou le calcul de moments d'inertie ne sont plus au programme des CPGE depuis 1997.

3. Connaissant les éléments de réduction en C du torseur cinématique du mouvement du cerceau dans $\mathcal{R}$ il vient :

$$\mathbf{V}(\mathrm{A},\mathcal{C}/\mathcal{R}) = \mathbf{V}(\mathrm{C},\mathcal{C}/\mathcal{R}) + \boldsymbol{\omega}(\mathcal{C}/\mathcal{R}) \wedge \mathbf{CA} = \dot{x}\,\mathbf{e}_x + (\dot{\theta}\,\mathbf{e}_z) \wedge (a\,\mathbf{e}_r)$$

Compte tenu de la condition de roulement sans glissement on en déduit :

$$\boxed{\mathbf{V}(\mathrm{A},\mathcal{C}/\mathcal{R}) = (1-\cos\theta)\dot{x}\,\mathbf{e}_x - \dot{x}\sin\theta\,\mathbf{e}_y}$$

Remarque. Il serait préférable d'exprimer cette vitesse uniquement en fonction de θ et $\dot{\theta}$.

4. L'énergie cinétique est une grandeur extensive donc l'énergie cinétique du cerceau lesté est telle que :

$$\mathcal{E}_c = \mathcal{E}_c(\mathcal{C}) + \mathcal{E}_c(\mathrm{A}) = m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}M\mathbf{V}^2(\mathrm{A},\mathcal{C}/\mathcal{R})$$

soit :

$$\boxed{\mathcal{E}_c = \mathcal{E}_c(\mathcal{C}) + \mathcal{E}_c(\mathrm{A}) = m\dot{x}^2 + M(1-\cos\theta)\dot{x}^2}$$

5. La puissance développée par le poids du lest est :

$$\boxed{\mathcal{P} = M\mathbf{g}.\mathbf{V}(\mathrm{A},\mathcal{C}/\mathcal{R}) = Mg\,\dot{x}\sin\theta}$$

C'est la seule force qui développe une puissance non nulle au cours du mouvement du cerceau lesté.

6. Le théorème de la puissance cinétique appliqué au cerceau lesté dans $\mathcal{R}$ nous conduit à l'équation différentielle :

$$2\big(m + M(1-\cos\theta)\big)\ddot{x} - \frac{M}{a}\dot{x}^2\sin\theta = Mg\sin\theta$$

On étudie les petits mouvements du système autour de sa position d'équilibre stable, $\theta_e = -\dfrac{x_e}{a} = 0$. La linéarisation de l'équation différentielle précédente au voisinage de cette position d'équilibre - on ne conserve que les infiniment petits du premier ordre - nous conduit à :

$$\ddot{x}+\frac{Mg}{2ma}x=0$$

C'est l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique de pulsation propre :

$$\boxed{\omega_0=\sqrt{\frac{Mg}{2ma}}}$$

7. Le théorème de la résultante dynamique appliqué au cerceau lesté dans $\mathcal{R}$ s'écrit :

$$m\mathbf{a}(C,\mathcal{C}/\mathcal{R})+M\mathbf{a}(A,\mathcal{C}/\mathcal{R})=(m+M)\mathbf{g}+\mathbf{R}$$

Il en résulte, en projection selon $\mathbf{e}_x$ et dans le cadre de l'approximation des petits mouvements :

$$\boxed{R_T=m\ddot{x}=-\frac{Mg}{2a}x}$$

Diviseur de tension.

On est en présence d'un diviseur de tension donc :

$$\underline{V}_s=\frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1+\underline{Z}_2}\underline{V}_e=\frac{1}{1+\left(\underline{Y}_1/\underline{Y}_2\right)}\underline{V}_e$$

d'où la fonction de transfert du circuit :

$$\boxed{\underline{T}(j\omega)=\frac{\underline{V}_s}{\underline{V}_e}=\frac{1}{1+\dfrac{R_2}{R_1}\dfrac{1+jC_1R_1\omega}{1+jC_2R_2\omega}}}$$

Si on rapproche cette expression de celle proposée dans l'énoncé on a respectivement :

8.

$$\boxed{A=\frac{R_2}{R_1}}$$

9.

$$\boxed{\omega_1=\frac{1}{R_1C_1}}$$

10.

$$\boxed{\omega_2=\frac{1}{R_2C_2}}$$

11. Les deux tensions sont en phase si la fonction de transfert est réelle soit si :

$$\boxed{R_2C_2=R_1C_1}$$

12. Dans ces conditions la valeur instantanée de la tension de sortie est :

$$\boxed{v_s(t)=V_s\cos(\omega t)=\frac{R_1}{R_1+R_2}V_e\cos(\omega t)}$$

13. On veut que $\dfrac{V_s}{V_e}=\dfrac{R_1}{R_1+R_2}=\dfrac{1}{10}$ et, par ailleurs, on a $C_2=C_1\dfrac{R_1}{R_2}$. Sachant que $R_1=1\,M\Omega$ et $C_1=1\,nF$ on en déduit aisément :

$$\boxed{R_2=9R_1=9\,M\Omega\quad,\quad C_2=\frac{1}{9}C_1=\frac{1}{9}nF}$$

Focométrie.

14. Objet et image sont réels on a donc, entre $p_o=\overline{OA}<0$ et $p_i=\overline{OA'}=\overline{OE}>0$, les relations :

$$D = p_i - p_o \quad , \quad -\frac{1}{p_o} + \frac{1}{p_i} = \frac{1}{f'}$$

On obtient, par élimination de p_o, une équation du second degré en p_i :

$$p_i^2 - Dp_i + Df' = 0$$

Cette équation admet deux racines réelles positives si :

$$\boxed{D > D_0 = 4f'}$$

15. Dans ce cas les deux positions de la lentille sont telles que :

$$p_i = \frac{D}{2}\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4f'}{D}}\right)$$

Elles sont donc distantes de :

$$d = \overline{O_1O_2} = p_{i+} - p_{i-} = \sqrt{D^2 - 4f'D}$$

On en déduit la distance focale de la lentille :

$$\boxed{f' = \frac{D^2 - d^2}{4D} = 180\,\text{mm}}$$

On vient de décrire la ***méthode de Bessel*** pour la détermination expérimentale de la distance focale d'une lentille mince convergente.

16. Le grandissement transversal est tel que :

$$G_t = \frac{p_i}{p_o} = \frac{-p_i}{D - p_i} = \left[1 - \frac{2}{1 \pm \sqrt{1 - (4f'/D)}}\right]^{-1}$$

soit pour les deux positions de la lentille :

$$\boxed{G_{t1} = -3{,}25 \quad \text{et} \quad G_{t2} = -0{,}31}$$

17. Si on a $G_{t1} = G_{t2} = -1$ alors une seule position de la lentille est possible, telle que $p_i = -p_o$, et donc :

$$\boxed{d_0 = 0\,\text{mm}}$$

Objet et image se trouvent dans les ***plans antiprincipaux*** de la lentille.

Cette situation correspond à la ***méthode de Silbermann***

18. Il en résulte que :

$$\boxed{D_0 = 4f' = 720\,\text{mm}}$$

19. Une lentille divergente ne donne pas d'image réelle d'un objet réel.

20. La lentille mince convergente $\mathcal{L}_0$, de centre optique O, donne d'un objet réel à l'infini une image réelle située dans son plan focal image, donc $\overline{OA'} = \Delta = \overline{OF_{i0}} = f'_0$.

Le centre optique O' de la lentille $\mathcal{L}'$, tel que $\overline{O'O} = \Delta$, est alors confondu avec le foyer principal objet F_{o0} de la lentille $\mathcal{L}_0$.

L'ensemble des deux lentilles va donner d'un objet réel $\overline{AB}$ à l'infini une image réelle $\overline{A''B''}$, soit :

$$\infty \xrightarrow{\mathcal{L}'} F_i \xrightarrow{\mathcal{L}_0} A''$$

La relation de conjugaison de Newton, pour la lentille $\mathcal{L}_0$, s'écrit alors :

$$\overline{F_{o0}F_i}.\overline{F_{i0}A''} = -f'^2_0$$

Or :

$$\overline{F_{o0}F_i} = \overline{O'F_i} = f'_i \quad , \quad \overline{F_{i0}A''} = \overline{A'A''} = \delta$$

On en déduit aisément :

$$\boxed{f'_i = -\frac{f'^2_0}{\delta}}$$

Moteur linéaire.

21. Le centre d'inertie du cadre est animé d'un mouvement de translation rectiligne et uniforme de vitesse $\mathbf{v} = \mathrm{v}\,\mathbf{e}_z$. Son abscisse à l'instant t > 0, compte tenu que $x(0) = 0$, est telle que :

$$\boxed{x(t) = v\,t}$$

22. Le cadre est plongé dans un champ magnétique $\mathbf{B}(x,t) = B_0 \cos\left(2\pi \frac{x}{\lambda} - \omega_0 t\right)\mathbf{e}_y$. On suppose que $a \ll \lambda$ ce qui permet de considérer **B** uniforme sur toute la surface de l'induit. Le flux du champ magnétique à travers le cadre est alors simplement :

$$\Phi(t) = N\mathbf{B}(t).\left(a^2\mathbf{e}_y\right) = Na^2B_0 \cos\left(\left(\frac{2\pi v}{\lambda} - \omega_0\right)t\right) = \Phi_0 \cos\left((\omega - \omega_0)t\right)$$

en posant :

$$\boxed{\Phi_0 = Na^2B_0 \quad , \quad \omega = 2\pi \frac{v}{\lambda}}$$

23. La force électromotrice induite dans le cadre par ce champ extérieur est donnée par la loi de Faraday :

$$\boxed{e(t) = -\frac{d\Phi(t)}{dt} = \Phi_0(\omega - \omega_0)\sin\left((\omega - \omega_0)t\right)}$$

24. Le cadre présente une résistance R et une inductance propre L. Le cadre étant indéformable, la loi d'Ohm se traduit alors par :

$$e(t) - L\frac{di(t)}{dt} = Ri(t)$$

soit :

$$L\frac{di(t)}{dt} + Ri(t) = \Phi_0(\omega - \omega_0)\sin\left((\omega - \omega_0)t\right)$$

En régime établi on recherche une solution de la forme $i(t) = I_0 \sin\left((\omega - \omega_0)t + \psi_0\right)$. L'équation différentielle précédente étant linéaire et à coefficients constants on peut utiliser le formalisme complexe et écrire $i(t) = \Im m\{\underline{i}(t)\}$ avec $\underline{i}(t) = \underline{I}_0 \exp\left(j(\omega - \omega_0)t\right) = \left(I_0 \exp(j\psi_0)\right)\exp\left(j(\omega - \omega_0)t\right)$.

On obtient ainsi :

$$\underline{I}_0 = I_0 \exp(j\psi_0) = \frac{\Phi_0(\omega - \omega_0)}{R + jL(\omega - \omega_0)}$$

Il en résulte que :

$$\boxed{I_0 = \left|\underline{I}_0\right| = \frac{\Phi_0|\omega - \omega_0|}{\sqrt{R^2 + L^2(\omega - \omega_0)^2}} \quad , \quad \tan\psi_0 = -\frac{L(\omega - \omega_0)}{R}}$$

25. La résultante des forces de Laplace qui s'exercent sur le cadre est :

$$\mathbf{F} = \oint_{\mathcal{C}} \left(i(t)d\ell\right) \wedge \mathbf{B}(x,t) = N\left(\int_{z_0 - \frac{a}{2}}^{z_0 + \frac{a}{2}} i(t)\left(B\left(x + \frac{a}{2}, t\right) - B\left(x - \frac{a}{2}, t\right)\right)dz\right)\mathbf{e}_x$$

car seuls les côtés parallèles à l'axe Oz ont une contribution non nulle.
Compte tenu de $a \ll \lambda$ on peut écrire :

$$B\left(x + \frac{a}{2}, t\right) - B\left(x - \frac{a}{2}, t\right) \approx a\frac{\partial B(x,t)}{\partial x} = -2\pi\frac{a}{\lambda}B_0 \sin\left((\omega - \omega_0)t\right)$$

Remarque. On obtient le même résultat en utilisant la relation trigonométrique :

$$\cos p - \cos q = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

En définitive il vient :

$$\mathbf{F}(t) = -2\pi\frac{\Phi_0 I_0}{\lambda}\sin\big((\omega-\omega_0)t\big)\sin\big((\omega-\omega_0)t+\psi_0\big)\mathbf{e}_x = F_0\sin\big((\omega-\omega_0)t\big)\sin\big((\omega-\omega_0)t+\psi_0\big)\mathbf{e}_x$$

en posant :

$$F_0 = -2\pi\frac{\Phi_0 I_0}{\lambda}$$

26. La valeur moyenne temporelle de cette force est :

$$\langle F(t)\rangle = \frac{1}{2}F_0\cos\psi_0 = -\pi\frac{\Phi_0 I_0}{\lambda}\cos\psi_0$$

27. Des résultats de la question 24 on déduit :

$$\cos\psi_0 = \frac{R}{\sqrt{R^2 + L^2(\omega-\omega_0)^2}}$$

Pompe à chaleur de Carnot.

28. Au cours d'un cycle élémentaire réversible, de durée dt, on a respectivement, à partir des deux principes de la thermodynamique :

$$\delta W + \delta Q_0 + \delta Q_c = 0 \quad , \quad \frac{\delta Q_0}{T_0} + \frac{\delta Q_c}{T_c(t)} = 0$$

Par ailleurs, au cours de ce cycle, l'agent thermique cède à la source chaude une quantité de chaleur :

$$-\delta Q_c = C\,dT_c(t)$$

On déduit, de ces trois relations, l'efficacité thermique de la pompe à chaleur pour ce cycle :

$$\eta(t) = \frac{-\delta Q_c}{\delta W} = \frac{T_c(t)}{T_c(t) - T_0}$$

29. On suppose que la pièce (*source chaude*) est thermiquement isolée de l'extérieur et présente une température initiale $T_c(0) = T_0$. Au cours d'un cycle élémentaire l'agent thermique reçoit un travail $\delta W = \mathcal{P}\,dt$ et fournit une quantité de chaleur $-\delta Q_c = C\,dT_c(t)$ à la pièce. Compte tenu de l'efficacité de la pompe à chaleur pour ce cycle il vient :

$$\eta(t) = \frac{C}{\mathcal{P}}\frac{dT_c(t)}{dt} = \frac{T_c(t)}{T_c(t) - T_0}$$

On en déduit l'équation différentielle qui régit l'évolution de la température du local au cours du temps :

$$\left(1 - \frac{T_0}{T_c(t)}\right)\frac{dT_c(t)}{dt} = \frac{\mathcal{P}}{C}$$

Le local atteint la température $T_c(t_0) = T_1$ après une durée de fonctionnement t_0 de la pompe telle que :

$$t_0 = \frac{C}{\mathcal{P}}\left(T_1 - T_0 - T_0\ln\left(\frac{T_1}{T_0}\right)\right)$$

30. On suppose que la puissance $\mathcal{P}$, fournie par une résistance chauffante, sert à chauffer directement la pièce, dans ce cas on a :

$$C\,dT_c(t) = \mathcal{P}\,dt$$

D'où on déduit la durée de fonctionnement de la résistance chauffante pour atteindre, toujours à partir de T_0, la même température finale que précédemment :

$$t_1 = \frac{C}{\mathcal{P}}(T_1 - T_0) > t_0$$

31. Le gain de temps que l'on obtient, en utilisant une pompe à chaleur plutôt qu'un radiateur électrique, est :

$$\boxed{\Delta t = t_1 - t_0 = \frac{C}{\mathcal{P}} T_0 \ln\left(\frac{T_1}{T_0}\right) = 80{,}5.10^3\,\mathrm{s} \approx 22\mathrm{h}22\,\mathrm{min}}$$

C'est énorme !

32. A l'instant t = 0, où la température est $T_c = 288\,\mathrm{K}$ on arrête le chauffage du local. Or, la pièce présente des fuites thermiques (*de type Newton*). Le bilan énergétique du local entre deux instants voisins t et $t + dt$ nous conduit à l'équation différentielle :

$$\frac{dT_c(t)}{dt} + k\left(T_c(t) - T_0\right) = 0$$

Compte tenu des conditions initiales elle s'intègre en :

$$T_c(t) = T_0 + \left(T_c - T_0\right)\exp(-kt)$$

Sachant que la température de pièce chute de $\Delta T_c = 1\,\mathrm{K}$ en $\tau = 3\,\mathrm{h}$ on en déduit :

$$\boxed{k = -\frac{1}{\tau}\ln\left(1 - \frac{\Delta T_c}{T_c - T_0}\right) = 0{,}2.10^{-4}\,\mathrm{s}^{-1}}$$

33. Si la pompe à chaleur fonctionne, l'agent thermique reçoit, au cours d'un cycle élémentaire, un travail $\delta W = \mathcal{P}\,dt$ et fournit, au local, une quantité de chaleur $-\delta Q_c = C\,dT_c(t) + kC\left(T_c(t) - T_0\right)dt$.

Compte tenu de l'expression de $\eta(t)$ on en déduit l'équation différentielle :

$$\frac{dT_c(t)}{dt} + k\left(T_c(t) - T_0\right) - \frac{\mathcal{P}}{C}\frac{T_c(t)}{T_c(t) - T_0} = 0$$

Au bout d'un temps suffisamment long, un régime stationnaire s'installe : l'énergie thermique apportée par la pompe sert uniquement à compenser les fuites thermiques, qui augmentent avec l'écart de température entre le local et le milieu extérieur. Dans ce cas la température du local atteint une valeur limite $T_{\ell 1}$ telle que :

$$\boxed{T_{\ell 1}^2 - 2\left(T_0 + \frac{\mathcal{P}}{2kC}\right)T_{\ell 1} + T_0^2 = 0}$$

Cette équation du second degré admet une seule solution physiquement acceptable.

34. Si la pompe à chaleur est remplacée par un radiateur électrique, l'équation différentielle qui régit l'évolution de la température du local est alors :

$$\frac{dT_c(t)}{dt} + k\left(T_c(t) - T_0\right) - \frac{\mathcal{P}}{C} = 0$$

On en déduit la nouvelle température limite de la pièce :

$$\boxed{T_{\ell 2} = T_0 + \frac{\mathcal{P}}{kC} \approx 288\,\mathrm{K}}$$

Filtre actif d'ordre deux : cellule de Rauch.

35. En régime linéaire, l'AO étant supposé idéal, le théorème de Millman appliqué aux nœuds M (*connexion de* $\underline{Y}_2$) et E₋ nous donne respectivement :

$$\underline{V}_M = \frac{\underline{Y}\left(\underline{V}_e + \underline{V}_s\right)}{3\underline{Y} + \underline{Y}_2} \qquad \underline{V}_{E_-} = 0 = \frac{\underline{Y}\,\underline{V}_M + \underline{Y}_1\underline{V}_s}{\underline{Y} + \underline{Y}_1}$$

Par élimination de $\underline{V}_M$ on en déduit le fonction de transfert :

$$\boxed{\underline{T}(j\omega) = \frac{\underline{V}_s}{\underline{V}_e} = \frac{-1}{1 + 3\dfrac{\underline{Y}_1}{\underline{Y}} + \dfrac{\underline{Y}_1\underline{Y}_2}{\underline{Y}^2}}}$$

36. On a $\underline{Y} = jC\omega$, $\underline{Y}_1 = \dfrac{1}{R}$ et $\underline{Y}_2 = \dfrac{\alpha}{R}$. Il en résulte, en posant $\omega_0 = \dfrac{1}{RC}$ et $x = \dfrac{\omega_0}{\omega}$:

$$\underline{T}(jx) = \frac{-1}{1-3jx-\alpha x^2}$$

soit :

$$\boxed{T(x) = \left|\underline{T}(jx)\right| = \frac{1}{\sqrt{\left(1-\alpha x^2\right)^2 + 9x^2}}}$$

Notons que nous sommes en présence d'un ***filtre passe-haut***.

37. On développe le dénominateur, d'où :

$$T(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1+(9-2\alpha)\left(\dfrac{\omega_0}{\omega}\right)^2 + \alpha^2\left(\dfrac{\omega_0}{\omega}\right)^4}}$$

On aura :

$$T(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1+\alpha_0^2\left(\dfrac{\omega_0}{\omega}\right)^4}} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\dfrac{\omega_1}{\omega}\right)^4}}$$

pour :

$$\boxed{\alpha_0 = \frac{9}{2}}$$

38. Ce qui nous donne :

$$\boxed{\omega_1 = \sqrt{\alpha_0}\,\omega_0 = \frac{3\omega_0}{\sqrt{2}}}$$

39. Lorsque $\alpha = \alpha_0$, la fonction de transfert s'écrit :

$$\underline{T}(j\omega) = \frac{-1}{1-3j\dfrac{\omega_0}{\omega}-\dfrac{9}{2}\left(\dfrac{\omega_0}{\omega}\right)^2} = \frac{-1}{1-\sqrt{2}j\dfrac{\omega_1}{\omega}-\left(\dfrac{\omega_1}{\omega}\right)^2}$$

On en déduit le déphasage j de la tension de sortie par rapport à la tension d'entrée :

$$\boxed{\varphi = \arg\underline{T}(j\omega) \Rightarrow \tan\varphi = \frac{\sqrt{2}}{\dfrac{\omega}{\omega_1}-\dfrac{\omega_1}{\omega}}}$$

40. Le gain en tension est tel que :

$$G_V(\mathrm{dB}) = 20\log\left|\underline{T}(j\omega)\right| = -10\log\left(1+\left(\frac{\omega_1}{\omega}\right)^4\right)$$

Une atténuation de la fonction de transfert de 40 dB par rapport à $T(\infty)=1$ correspond à une pulsation ω_2 telle que :

$$G_V(\mathrm{dB}) \approx -40\log\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right) = -40$$

soit :

$$\boxed{\omega_2 = \frac{\omega_1}{10} = \frac{3\omega_0}{10\sqrt{2}}}$$

-:-:-:-:-