

# ICNA - SESSION 2009

## ÉPREUVE COMMUNE DE PHYSIQUE

### CORRIGÉ

#### Étude d'un modèle simplifié de moto.

1. Les roues  $S_1$  et  $S_2$  roulent sans glisser sur le sol. La nullité de la vitesse de glissement en  $I_i$  ( $i = 1, 2$ ) se traduit par :

$$\vec{V}(I_i, S_i / \mathcal{R}) = \vec{V}(C_i, S_i / \mathcal{R}) + \vec{\omega}(S_i / \mathcal{R}) \wedge \overline{C_i I_i} = \vec{0}$$

Les points  $C_1, C_2$ , centres des roues, sont aussi liés au châssis, ils ont donc la même vitesse de translation que  $C_3$  et  $C$ , ainsi :

$$\vec{V}(C_1, S_1 / \mathcal{R}) = \vec{V}(C_2, S_2 / \mathcal{R}) = v \vec{e}_y$$

Il en résulte que :

$$v = -R\omega_1 = -R\omega_2$$

On observe, évidemment, que :

$$\omega_1 = \omega_2 = -\frac{v}{R}$$

2. L'énergie cinétique est une grandeur extensive, donc :

$$E_k(\Sigma / \mathcal{R}) = E_k(S_1 / \mathcal{R}) + E_k(S_2 / \mathcal{R}) + E_k(S_3 / \mathcal{R})$$

Le châssis est uniquement en translation dans  $\mathcal{R}$ , donc son énergie cinétique est :

$$E_k(S_3 / \mathcal{R}) = \frac{1}{2}(M - 2m)\vec{V}^2(C_3, S_3 / \mathcal{R}) = \frac{1}{2}(M - 2m)v^2$$

L'énergie cinétique des roues se détermine à l'aide du théorème de Koenig relatif à l'énergie cinétique, soit :

$$E_k(S_i / \mathcal{R}) = \frac{1}{2}m\vec{V}^2(C_i, S_i / \mathcal{R}) + \frac{1}{2}I\vec{\omega}^2(S_i / \mathcal{R}) \quad (i = 1, 2)$$

On en déduit :

$$E_k(S_1 / \mathcal{R}) = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega_1^2, \quad E_k(S_2 / \mathcal{R}) = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega_2^2$$

Il en résulte que :

$$E_k(\Sigma / \mathcal{R}) = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}I\omega_1^2 + \frac{1}{2}I\omega_2^2$$

Compte tenu de la condition de roulement sans glissement des roues sur le sol, l'expression précédente se simplifie en :

$$E_k(\Sigma / \mathcal{R}) = \frac{1}{2}\left(M + \frac{2I}{R^2}\right)v^2$$

3. Le moment cinétique est une grandeur extensive, donc :

$$\vec{L}_C(\Sigma / \mathcal{R}) = \vec{L}_C(S_1 / \mathcal{R}) + \vec{L}_C(S_2 / \mathcal{R}) + \vec{L}_C(S_3 / \mathcal{R})$$

On utilise alors le théorème de Koenig relatif au moment cinétique, soit :

$$\vec{L}_C(S_i / \mathcal{R}) = \vec{L}_{C_i}(S_i / \mathcal{R}) + \overline{C C_i} \wedge m_i \vec{V}(C_i, S_i / \mathcal{R}) \quad (i = 1, 2, 3)$$

Le châssis est uniquement en translation dans  $\mathcal{R}$ , donc :

$$\vec{L}_C(S_3 / \mathcal{R}) = \overline{C C_3} \wedge (M - 2m)\vec{V}(C_3, S_3 / \mathcal{R}) = (M - 2m)\overline{C C_3} \wedge (v\vec{e}_y)$$

Pour les roues, sachant que,  $\vec{L}_{C_i}(S_i / \mathcal{R}) = I\vec{\omega}(S_i / \mathcal{R})$ ,  $\vec{V}(C_1, S_1 / \mathcal{R}) = \vec{V}(C_2, S_2 / \mathcal{R}) = \vec{V}(C_3, S_3 / \mathcal{R}) = v\vec{e}_y$

et  $\vec{\omega}(S_1 / \mathcal{R}) = \vec{\omega}(S_2 / \mathcal{R}) = -\frac{v}{R}\vec{e}_x$ , on obtient respectivement :

$$\bar{L}_C(S_1/\mathcal{R}) = -\frac{I}{R} v \bar{e}_x + m \bar{C}\bar{C}_1 \wedge (v \bar{e}_y) \quad , \quad \bar{L}_C(S_2/\mathcal{R}) = -\frac{I}{R} v \bar{e}_x + m \bar{C}\bar{C}_2 \wedge (v \bar{e}_y)$$

On déduit :

$$\bar{L}_C(\Sigma/\mathcal{R}) = -\frac{2I}{R} v \bar{e}_x + ((M-2m)\bar{C}\bar{C}_3 + m\bar{C}\bar{C}_1 + m\bar{C}\bar{C}_2) \wedge (v \bar{e}_y)$$

Or par définition du centre de masse du système  $\Sigma$  on a :

$$(M-2m)\bar{C}\bar{C}_3 + m\bar{C}\bar{C}_1 + m\bar{C}\bar{C}_2 = \vec{0}$$

En définitive il vient :

$$\boxed{\bar{L}_C(\Sigma/\mathcal{R}) = -\frac{2I}{R} v \bar{e}_x}$$

4. On pose  $\bar{\Gamma}_i = \Gamma_i \bar{e}_x$  ( $i = 1, 2$ ). Compte tenu de l'orientation du trièdre de référence nous aurons :

- ♦  $\Gamma_1 < 0$  pendant la phase d'accélération ;
- ♦  $\Gamma_1 > 0$  pendant la phase de freinage ;
- ♦  $\Gamma_2 > 0$ .

#### 5. Question sans objet.

Pour déterminer l'expression de  $\bar{\Gamma}_2$  (voir question 7) il faut appliquer le théorème du moment cinétique barycentrique à la roue  $S_2$  dans  $\mathcal{R}$ . Il est alors nécessaire de modéliser :

- ♦ les actions de  $S_3$  sur  $S_2$  ;
- ♦ les actions du sol sur  $S_2$ .

Or, à ce stade du développement, nous savons uniquement que la liaison pivot entre  $S_3$  et  $S_2$  est parfaite.

6. On applique le théorème de la puissance cinétique à  $\Sigma$  dans  $\mathcal{R}$ , soit :

$$\frac{dE_k(\Sigma/\mathcal{R})}{dt} = \mathcal{P}_{\text{ext}} + \mathcal{P}_{\text{int}}$$

a) Bilan des forces extérieures :

- ♦ poids du système,  $\bar{P} = M\bar{g}$  ;
- ♦ actions du sol sur le système en  $I_1$  et  $I_2$  schématisées respectivement par  $\bar{R}_1$  et  $\bar{R}_2$  (voir question 7).

Le déplacement de  $\Sigma$  dans  $\mathcal{R}$  s'effectuant sur un sol horizontal on a  $\mathcal{P}(\bar{P}/\mathcal{R}) = M\bar{g} \cdot \vec{V}(C, \Sigma/\mathcal{R}) = 0$ . Par

ailleurs, les roues roulent sans glisser sur le sol, ainsi  $\mathcal{P}(\bar{R}_i/\mathcal{R}) = \bar{T}_i \cdot \vec{V}(I_i, S_i/\mathcal{R}) = 0$ , ( $i = 1, 2$ ).

La puissance développée par les actions extérieures est donc nulle,  $\mathcal{P}_{\text{ext}} = 0$ .

b) Bilan des actions intérieures :

- ♦ les couples  $\bar{\Gamma}_1$  et  $\bar{\Gamma}_2$  ;
- ♦ les actions de contact au niveau des liaisons pivot entre les roues et le châssis.

Comme on suppose ces liaisons pivot parfaites, soit  $\mathcal{P}(S_3 \leftrightarrow S_1) = \mathcal{P}(S_3 \leftrightarrow S_2) = 0$ . La puissance développée par les actions intérieures se limite à celle des couples appliqués, donc :

$$\mathcal{P}_{\text{int}} = \sum_{i=1}^2 \bar{\Gamma}_i \cdot \bar{\omega}(S_i/\mathcal{R}) = -(\Gamma_1 + \Gamma_2) \frac{v}{R}$$

En définitive, en utilisant le résultat de la question 2, on obtient l'équation du mouvement de  $\Sigma$  dans  $\mathcal{R}$  :

$$\boxed{\frac{dv}{dt} = \frac{-(\Gamma_1 + \Gamma_2)R}{MR^2 + I}}$$

Avec la condition initiale imposée,  $v(0) = 0$ , cette relation s'intègre en :

$$\boxed{v(t) = \frac{-(\Gamma_1 + \Gamma_2)R}{MR^2 + I} t}$$

7. Le théorème du moment cinétique barycentrique appliqué aux roues s'écrit :

$$\left( \frac{d\bar{L}_{C_i}(S_i/\mathcal{R})}{dt} \right)_{\mathcal{R}} = \bar{M}_{\text{ext}}(C_i) \quad (i=1,2)$$

avec :

$$\diamond \bar{L}_{C_i}(S_i/\mathcal{R}) = I\omega_i \bar{e}_x = -\frac{Iv}{R} \bar{e}_x$$

$$\diamond \bar{M}_{\text{ext}}(C_i) = \bar{\Gamma}_i + \bar{C}_i \bar{I}_i \wedge \bar{R}_i + \bar{C}_i \bar{C}_i \wedge m\bar{g} + \bar{M}_c(C_i/S_3 \rightarrow S_i) = (\Gamma_i + RT_i) \bar{e}_x + \bar{M}_c(C_i/S_3 \rightarrow S_i)$$

Comme on suppose la liaison pivot parfaite entre chaque roue et le châssis, on a :

$$\bar{M}_c(C_i/S_3 \rightarrow S_i) \cdot \bar{e}_x = 0$$

La projection du théorème du moment cinétique barycentrique selon  $\bar{e}_x$ , vecteur fixe dans  $\mathcal{R}$ , nous conduit alors à :

$$\left| T_i = -\frac{I}{R^2} \frac{dv}{dt} - \frac{\Gamma_i}{R} \quad (i=1,2) \right.$$

On en déduit :

$$\left| T_1 + T_2 = -\frac{2I}{R^2} \frac{dv}{dt} - \frac{\Gamma_1 + \Gamma_2}{R} \right.$$

8. On applique le théorème de la résultante cinétique - appelé aussi théorème de la résultante dynamique - à  $\Sigma$  dans  $\mathcal{R}$ , soit :

$$M \left( \frac{d\bar{V}(C, \Sigma/\mathcal{R})}{dt} \right)_{\mathcal{R}} = M\bar{g} + \bar{R}_1 + \bar{R}_2$$

Il conduit, en projection respectivement selon  $\bar{e}_x$  et selon  $\bar{e}_z$ , aux deux équations scalaires :

$$\left| T_1 + T_2 = M \frac{dv}{dt} \quad \left| N_1 + N_2 = Mg \right. \right.$$

9. On applique le théorème du moment cinétique à  $\Sigma$  en C dans  $\mathcal{R}$ , soit :

$$\left( \frac{d\bar{L}_C(\Sigma/\mathcal{R})}{dt} \right)_{\mathcal{R}} = \bar{M}_{\text{ext}}(C) = \sum_{i=1}^2 \bar{C}I_i \wedge \bar{R}_i + \underbrace{\bar{C}C \wedge M\bar{g}}_0$$

avec :

$$\bar{C}I_1 \wedge \bar{R}_1 = (hT_1 - d_1 N_1) \bar{e}_x \quad \text{et} \quad \bar{C}I_2 \wedge \bar{R}_2 = (hT_2 + d_2 N_2) \bar{e}_x$$

Ainsi, en utilisant le résultat de la question 3, on obtient :

$$-\frac{2I}{R} \frac{dv}{dt} = (d_2 N_2 - d_1 N_1) + h(T_1 + T_2)$$

On fait alors appel aux deux équations scalaires obtenues à la question 8, ce qui nous conduit à :

$$\left| (d_1 + d_2) N_1 = d_2 Mg + \left( Mh + \frac{2I}{R} \right) \frac{dv}{dt} \quad , \quad (d_1 + d_2) N_2 = d_1 Mg - \left( Mh + \frac{2I}{R} \right) \frac{dv}{dt} \right.$$

On observe que, à l'accélération, la roue arrière (*motrice*) supporte un "poids" supérieur par rapport à la roue avant (*porteuse*). La roue avant peut décoller du sol, ce qui correspond à l'annulation de  $N_2$ , si l'accélération est trop importante.

**Remarque.** Le calcul que nous venons d'effectuer ne me paraît pas utile dès lors qu'il n'est pas exploité par la suite.

10. Les roues roulent sans glisser sur le sol horizontal donc, d'après les lois de Coulomb-Morin sur le frottement de glissement, on a :

$$\left| T_i \right| < f N_i \quad (i=1,2)$$

On est dans une phase d'accélération, supposée constante, donc :

$$\left| \Gamma_2 = 0 \right.$$

et, d'après les résultats des questions 7 et 8, il vient :

$$\Gamma_1 = -\left(M + \frac{2I}{R^2}\right)a_0 < 0$$

Ce résultat est parfaitement cohérent avec celui de la question 4.

11. En exploitant les résultats de la question précédente et ceux de la question 7 on obtient aisément :

$$T_1 = \left(M + \frac{I}{R^2}\right)a_0 > 0, \quad T_2 = -\frac{I}{R^2}a_0 < 0$$

en accord avec le fait que la roue  $S_1$  est motrice et la roue  $S_2$  porteuse.

Au cours de la phase d'accélération il ne faut pas que la roue arrière patine ce qui impose  $|T_1| < fN_1$ , soit :

$$|\Gamma_1| < |\Gamma_{1,1}|_{\max} = \frac{\left(M + \frac{2I}{R^2}\right)d_2 f M g}{(d_1 + d_2)\left(M + \frac{I}{R^2}\right) - f\left(Mh + \frac{2I}{R}\right)}$$

Par ailleurs la roue avant ne doit pas décoller du sol,  $N_2 > 0$ , ce qui implique :

$$|\Gamma_1| < |\Gamma_{1,2}|_{\max} = \frac{\left(M + \frac{2I}{R^2}\right)d_1 M g}{\left(Mh + \frac{2I}{R}\right)}$$

Ces deux valeurs maximales du couple moteur seront égales pour :

$$f = f_0 = \frac{\left(M + \frac{2I}{R^2}\right)d_1}{\left(Mh + \frac{2I}{R}\right)} > \left(1 + \frac{2I}{MR^2}\right)\frac{a_0}{g}$$

En conclusion, il y aura ni patinage de la roue motrice ni cabrage de la moto si on a simultanément  $f > f_0$  et  $|\Gamma_1| < |\Gamma_{1,2}|_{\max}$ .

### Diffusion thermique.

12.  $h$  en  $J.s^{-1}.K^{-1}.m^{-2} = W.K^{-1}.m^{-2}$  et  $\lambda$  en  $J.s^{-1}.K^{-1}.m^{-1} = W.K^{-1}.m^{-1}$ .

13. **Question de vocabulaire.** En général, compte tenu de l'analogie entre les lois de Fourier, d'Ohm et de Fick,  $\vec{j}_Q$  est appelé densité volumique de courant thermique ou encore densité surfacique de flux thermique.

Le bilan de puissance thermique, en régime stationnaire, dans le cylindre élémentaire, de section  $S = \pi R^2$ , compris entre les deux sections droites  $z$  et  $z + dz$ , se traduit, en l'absence de terme de production, par :

$$\left[ j_Q(z) - j_Q(z + dz) \right] \pi R^2 = 2\pi R_c j_c(z) dz$$

Il en résulte l'équation différentielle :

$$-\frac{dj_Q(z)}{dz} = \frac{2}{R} j_c(z)$$

14. D'après la loi de Fourier on a :  $j_Q(z) = -\lambda \frac{dT(z)}{dz}$ . Par ailleurs l'échange conducto-convectif avec

l'air ambiant est donné par la loi de Newton :  $j_c = h(T(z) - T_{\text{atm}})$ .

Cette dernière relation doit être donnée dans l'énoncé car elle n'est pas explicitement au programme.

On en déduit l'équation différentielle qui régit la répartition de température dans le cylindre :

$$\left| \frac{d^2 T(z)}{dz^2} - \frac{2h}{\lambda R} (T(z) - T_{\text{atm}}) = 0 \right.$$

15. La solution générale de cette équation différentielle est :

$$T(z) = T_{\text{atm}} + A \exp(\alpha z) + B \exp(-\alpha z)$$

avec :

$$\left| \alpha = \sqrt{\frac{2h}{\lambda R}} \right.$$

On détermine les constantes A et B à l'aide des conditions aux limites,  $T(0) = T_{\text{inf}}$  et  $T(L) = T_{\text{sup}}$ . On obtient ainsi :

$$\left| A = \frac{T_{\text{sup}} - T_{\text{atm}} - (T_{\text{inf}} - T_{\text{atm}}) \exp(-\alpha L)}{\exp(\alpha L) - \exp(-\alpha L)}, \quad B = \frac{(T_{\text{inf}} - T_{\text{atm}}) \exp(\alpha L) - (T_{\text{sup}} - T_{\text{atm}})}{\exp(\alpha L) - \exp(-\alpha L)} \right.$$

16. La barre est supposée de longueur infinie avec  $T_{\text{sup}} = T_{\text{atm}}$ , dans ce cas  $B = T_{\text{inf}} - T_{\text{atm}}$  et  $A = 0$ .

Le profil de température devient :

$$\left| T(z) = T_{\text{atm}} + (T_{\text{inf}} - T_{\text{atm}}) \exp(-\alpha z) \right.$$

### Conduction thermique (bis).

17. On effectue un bilan de puissance thermique dans le volume élémentaire compris entre les cylindres coaxiaux de rayons  $r$  et  $r + dr$  ( $R_1 < r < R_2$ ), de hauteur  $dz$ . En régime stationnaire et en l'absence de terme de production il vient :

$$\left| \left[ r \vec{j}_Q(r) - (r + dr) \vec{j}_Q(r + dr) \right] 2\pi dz = 0 \right.$$

Il en résulte que :

$$\frac{d(r \vec{j}_Q(r))}{dr} = 0$$

ce qui signifie que  $\vec{j}_Q(r)$  est à flux conservatif.

18. Pour ce système à symétrie cylindrique la loi de Fourier se traduit par :

$$\left| \vec{j}_Q = j_Q(r) \vec{e}_r = -\lambda \frac{dT(r)}{dr} \vec{e}_r \right.$$

19. Le bilan de puissance thermique et la loi de Fourier conduisent à un profil de température dans la conduite (pourquoi parler ici de gaine ?) de la forme :

$$T(r) = A \ln r + B$$

On détermine les constantes A et B à l'aide des conditions aux limites en  $r = R_1$  et  $r = R_2$ , d'où :

$$\left| T(r) = T(R_1) + (T(R_2) - T(R_1)) \frac{\ln(r/R_1)}{\ln(R_2/R_1)} \right.$$

20. La densité de courant thermique associée à ce profil de température est alors :

$$\vec{j}_Q(r) = -\lambda \frac{T(R_2) - T(R_1)}{\ln(R_2/R_1)} \frac{1}{r} \vec{e}_r$$

Le flux thermique à travers la surface latérale d'un cylindre d'axe Oz, de rayon  $r$  ( $R_1 < r < R_2$ ) et de hauteur unité est constant (voir question 17) et vaut :

$$\phi = 2\pi\lambda \frac{T(R_1) - T(R_2)}{\ln(R_2/R_1)}$$

On en déduit la résistance thermique de conduction par unité de longueur de la conduite :

$$R_c = \frac{T(R_1) - T(R_2)}{\phi} = \frac{\ln(R_2/R_1)}{2\pi\lambda}$$

21. Les échanges convectifs au niveau des fluides, compte tenu de la continuité du flux thermique et de la loi de Newton (question 14), nous donnent, toujours par unité de longueur de conduite :

$$\phi = 2\pi h_1 R_1 (T_0 - T(R_1)) = 2\pi h_2 R_2 (T(R_2) - T_{atm})$$

On en déduit les résistances thermiques associées :

$$R_{fluide} = \frac{T_0 - T(R_1)}{\phi} = \frac{1}{2\pi h_1 R_1}, \quad R_{air} = \frac{T(R_2) - T_{atm}}{\phi} = \frac{1}{2\pi h_2 R_2}$$

La résistance thermique totale par unité de longueur de la conduite est alors :

$$R_{th} = \frac{T_0 - T_{atm}}{\phi} = \frac{(T_0 - T(R_1)) + (T(R_1) - T(R_2)) + (T(R_2) - T_{atm})}{\phi} = R_{fluide} + R_c + R_{air}$$

Ce résultat était attendu car ces résistances thermiques, qui se comportent comme les résistances électriques, sont montées en série puisqu'elles sont traversées par le même flux thermique.

### Optique géométrique : associations de lentilles minces.

22. La lunette, constituée des lentilles minces convergentes  $L_1$  et  $L_2$ , est afocale si un faisceau incident parallèle à l'axe optique émerge de l'oculaire parallèlement à l'axe optique. Pour cela, il est nécessaire que le foyer image  $F'_1$  de  $L_1$  coïncide avec le foyer objet  $F_2$  de  $L_2$ . On aura alors :

$$\overline{O_1 O_2} = f_1 + f_2 = 40 \text{ cm} .$$

23. Dans un système dioptrique afocal les foyers sont rejetés à l'infini.

24. On a  $O_3 = F'_1 = F_2$  donc nous sommes toujours en présence d'un système afocal. Les foyers étant rejetés à l'infini ce système présente une vergence nulle.

25. On veut que  $F_2$  soit sa propre image à travers l'association des trois lentilles.  $F_2$ , situé entre  $L_1$  et  $L_2$ , est, à la fois, objet virtuel et image virtuelle pour le système.

26. **Attention, les notations utilisées dans l'énoncé ne sont pas cohérentes.**

On a :  $F_2 \xrightarrow{L_1} F_{21} \xrightarrow{L_3} F_{23} \xrightarrow{L_2} F_2$ . Dans ce cas, la formule de conjugaison de Newton appliquée respectivement à  $L_1$  puis à  $L_2$ , compte tenu que  $F'_1 = F_2$ , nous donne :

$$\overline{F_1 F_2} \cdot \overline{F'_1 F_{21}} = -f_1^2 \Rightarrow \overline{F_2 F_1} \cdot \overline{F_2 F_{21}} = f_1^2 \quad \overline{F_2 F_{23}} \cdot \overline{F'_2 F_2} = -f_2^2$$

27. On applique la formule de conjugaison de Descartes à  $L_3$ , soit compte tenu que  $O_3 = F'_1 = F_2$  :

$$\frac{-1}{O_3 F_{21}} + \frac{1}{O_3 F_{23}} = \frac{1}{f_3} \Rightarrow \frac{-1}{F_2 F_{21}} + \frac{1}{F_2 F_{23}} = \frac{1}{f_3}$$

28. Les résultats des questions 26 et 27 nous conduisent aisément à la distance focale de la lentille  $L_3$  :

$$f_3 = \frac{f_1 f_2}{2(f_1 + f_2)} = 3,75 \text{ cm}$$

29. Le système étant afocal le grandissement transversal est :

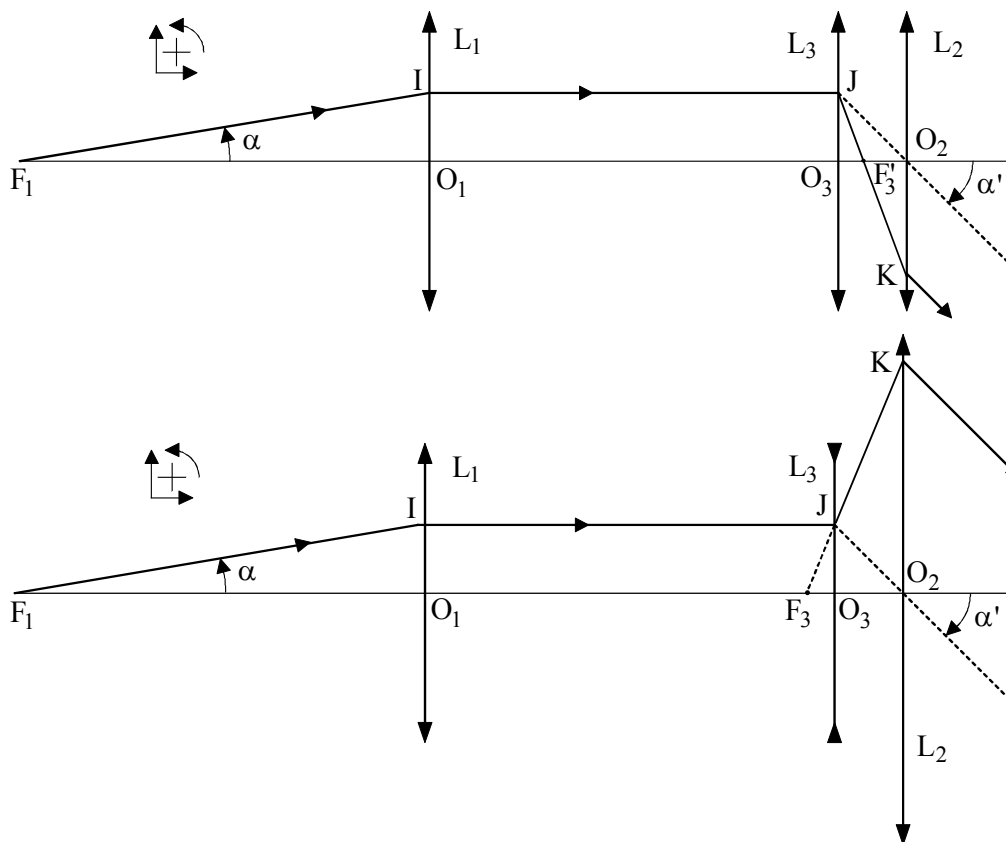
$$G_t = \frac{-f_2}{f_1} = -\frac{1}{3}$$

Les milieux extrêmes étant identiques on a, pour un système afocal,  $G_t \cdot G_a = +1$  ce qui nous conduit à un grandissement angulaire :

$$G_a = \frac{1}{G_t} = -3$$

**Remarque.** On peut déduire ces résultats à partir d'un simple schéma.

30. La lentille  $L_3$  n'intervient pas dans la détermination de  $G_t$  et de  $G_a$  donc, si on modifie sa nature, on ne change pas les résultats précédents. On peut s'en convaincre à l'aide des schémas ci-dessous.



Dans les deux cas nous avons :

$$G_a = \frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{\overline{O_3J}}{\overline{O_2O_3}} \cdot \frac{\overline{F_1O_1}}{\overline{O_1I}} = \frac{\overline{O_3J}}{\overline{O_1I}} \cdot \left( \frac{\overline{F_1O_1}}{-\overline{F_2O_2}} \right)$$

Or,  $\overline{O_3J} = \overline{O_1J}$ , d'où :

$$G_a = \frac{\alpha'}{\alpha} = -\frac{f_1}{f_2} = -3$$

On déduit alors  $G_t$  de la relation  $G_t \cdot G_a = +1$ .

### Électromagnétisme.

On note Oz l'axe du condensateur dont les armatures circulaires de rayon R, chargées positivement et négativement, sont disposées respectivement dans les plans  $z = -e$  et  $z = +e$ . On suppose, par ailleurs, les effets de bord négligeables ce qui permet de considérer comme uniforme le champ électrique entre les armatures.

31. Les conducteurs qui constituent les armatures sont en équilibre électrostatique. Or, par définition, le champ électrostatique est nul dans tout le volume d'un conducteur en équilibre électrostatique. Il en résulte, avec l'équation de Maxwell-Gauss,  $\text{div}(\epsilon_0 \vec{E}) = \rho$ , que la densité volumique de charge est nulle dans tout le volume d'un conducteur en équilibre électrostatique.

$$\boxed{\rho = 0}$$

Si on apporte une charge électrique Q sur un tel conducteur, initialement neutre, cette charge ne peut que se répartir en surface, soit dans la géométrie proposée ici avec une densité superficielle :

$$\boxed{\sigma = \frac{Q}{\pi R^2}}$$

**Remarque.** Notons qu'un conducteur en équilibre électrostatique constitue un volume équipotentiel.

**32.** Un condensateur qui, soumis à une différence de potentiel  $V$ , acquiert une charge  $Q$ , présente une capacité :

$$\boxed{C = \frac{Q}{V} = \frac{\pi R^2 \sigma}{V}}$$

**33.** La capacité d'un condensateur plan d'épaisseur  $2e$  dont les armatures ont chacune une aire  $S = \pi R^2$  est :

$$\boxed{C = \epsilon_0 \frac{\pi R^2}{2e}}$$

**34.** On considère l'armature positive qui tourne autour de l'axe  $Oz$  avec un vecteur rotation  $\vec{\omega}(A^+ / \mathcal{R}) = \omega \vec{e}_z = 2\pi n \vec{e}_z$ . Il apparaît un courant de convection dont la densité superficielle en un point  $M^+$  de l'armature est :

$$\vec{j}_s(M^+) = \sigma \vec{\omega}(A^+ / \mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{OM^+} = 2\pi \sigma n r \vec{e}_\theta$$

Ainsi, le cylindre creux, d'axe  $Oz$ , de rayon moyen  $r$ , d'épaisseur  $dr$ , de hauteur  $h$ , portant la charge électrique  $dq$ , va être parcouru par le courant élémentaire d'intensité :

$$\boxed{di = \vec{j}_s(M^+) \cdot (dr \vec{e}_\theta) = 2\pi \sigma n r dr = n dq}$$

La même démarche pour l'armature négative conduit, évidemment, à un courant élémentaire égal en valeur absolue mais de sens contraire au précédent.

**35. Attention, il ne s'agit pas ici de déterminer le champ magnétique créé par une armature en  $O$  mais du champ magnétique créé en  $O$  par la spire circulaire plane d'axe  $Oz$ , de rayon moyen  $r$ , d'épaisseur  $dr$ , parcourue par le courant  $di$ .**

On peut considérer que c'est l'armature positive située dans le plan  $z = -e$ . On obtient aisément :

$$\boxed{d\vec{B}_1(O) = \mu_0 \frac{di}{2} \frac{r^2}{(r^2 + e^2)^{3/2}} \vec{e}_z \Rightarrow \|d\vec{B}_1(O)\| = \mu_0 \frac{di}{2} \frac{r^2}{(r^2 + e^2)^{3/2}}}$$

**36.** Pour la même géométrie relative à l'autre armature - donc ici la négative - il vient :

$$d\vec{B}_2(O) = \mu_0 \frac{-di}{2} \frac{r^2}{(r^2 + e^2)^{3/2}} \vec{e}_z \Rightarrow \|d\vec{B}_2(O)\| = \mu_0 \frac{di}{2} \frac{r^2}{(r^2 + e^2)^{3/2}}$$

$d\vec{B}_1(O)$  et  $d\vec{B}_2(O)$  ont même direction, même norme, mais sont de sens opposés.

**37.** La norme du champ magnétique total créé en  $O$  par la rotation des deux armatures est :

$$\boxed{B(O) = \|\vec{B}_1(O) + \vec{B}_2(O)\| = \left\| \int_0^R (d\vec{B}_1(O) + d\vec{B}_2(O)) \right\| = 0}$$

**38.** On vient de donner la réponse dans la question précédente.

**39.** Si les deux armatures tournent dans le même sens à la même vitesse angulaire le champ magnétique résultant en  $O$  est alors :

$$\vec{B}(O) = 2 \int_0^R d\vec{B}_1(O) = 2\pi \mu_0 \sigma n \int_0^R \frac{r^3 dr}{(r^2 + e^2)^{3/2}} \vec{e}_z$$

Compte tenu que  $\sigma = \frac{\epsilon_0 V}{2e}$ , une intégration par parties nous donne :

$$\boxed{B(O) = \pi \epsilon_0 \mu_0 n V \left[ \frac{R^2 + 2e}{e \sqrt{R^2 + e^2}} - 2 \right]}$$



40. Si  $2e \ll R$  on obtient :

$$B(O) \approx \pi \epsilon_0 \mu_0 n V \left( \frac{R}{e} - 2 \right)$$

-:-:-:-