ICNA - SESSION 2009
ÉPREUVE OPTIONNELLE DE PHYSIQUE
CORRIGÉ

Diffusion thermique dans un câble électrique.

1. La puissance volumique dissipée par effet Joule dans le conducteur est donnée par $\mathcal{P}_J = \vec{J}_e.\vec{E} = \dfrac{J_e^2}{\gamma}$.

Le vecteur densité de courant étant uniforme on a $J_e = \dfrac{I}{\pi R_1^2}$ ce qui nous conduit à :

$$\boxed{\mathcal{P}_J = \frac{I^2}{\gamma \pi^2 R_1^4}}$$

2. Le flux thermique - homogène à une puissance - sortant à travers la surface latérale du cylindre d'axe Oz, de hauteur h et de rayon $\rho < R_1$, est :

$$\boxed{\phi_1(\rho,t) = \iint_S \left(J_{u,O}(\rho,t)\vec{e}_\rho\right).\left(\rho\, d\theta\, dz\, \vec{e}_\rho\right) = 2\pi\rho\, h\, J_{u,O}(\rho,t)}$$

3. En régime stationnaire la puissance dissipée par effet Joule dans le conducteur cylindrique précédent (*rayon* ρ, *hauteur* h) est totalement évacuée, par diffusion, à travers sa surface latérale, soit :

$$2\pi\rho\, h\, J_{u,O}(\rho) = \frac{h\rho^2 I^2}{\gamma \pi R_1^4}$$

On en déduit la densité de courant thermique :

$$\boxed{J_{u,O}(\rho) = \frac{I^2 \rho}{2\pi^2 \gamma R_1^4}}$$

4. La loi de Fourier, dans le conducteur, se traduit par :

$$-\lambda_1 \frac{dT(\rho)}{d\rho} = \frac{I^2\rho}{2\pi^2\gamma R_1^4}$$

On en déduit, par intégration, le profil de température à l'intérieur du conducteur :

$$\boxed{T(\rho) = T(0) - \frac{I^2\rho^2}{4\pi^2\gamma\lambda_1 R_1^4}}$$

5. Le flux thermique est continu en $\rho = R_1$. Par ailleurs, en régime stationnaire, la densité de courant thermique dans la gaine, dépourvue de terme de source, est à flux conservatif. Il en résulte que :

$$\boxed{\phi_2(\rho) = \phi_2(R_1) = \phi_1(R_1) = \frac{h I^2}{\pi \gamma R_1^2} = \text{Cte}}$$

6. Avec la loi de Fourier on peut écrire :

$$\phi_2(\rho) = \frac{h I^2}{\pi\gamma R_1^2} = -\lambda_2 \frac{dT(\rho)}{d\rho} 2\pi h \rho$$

soit :

$$dT(\rho) = \frac{-I^2}{2\pi^2 \lambda_2 \gamma R_1^2}\frac{d\rho}{\rho}$$

On en déduit, par intégration, la température à la surface de la gaine en fonction de la température à la surface du conducteur ohmique :

$$\boxed{T(R_2) = T(R_1) - \frac{I^2}{2\pi^2 \lambda_2 \gamma R_1^2} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}$$

7. Par définition, la résistance linéique du conducteur ohmique est $r_\ell = \frac{1}{\pi \gamma R_1^2}$. En utilisant les résultats des questions 4 et 6 il vient :

$$\boxed{T(0) = T(R_2) + \left(\frac{1}{4\pi\lambda_1} + \frac{\ln(R_2/R_1)}{2\pi\lambda_2}\right) r_\ell I^2}$$

Mouvement d'une barre dans un plan vertical.

8. La vitesse du centre d'inertie de la barre dans le référentiel du laboratoire, supposé galiléen, est :

$$\boxed{\vec{V}(C,\mathcal{T}/\mathcal{R}) = \left(\frac{d\overrightarrow{OC}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = \frac{L\dot{\theta}}{2}\left(\cos\theta\,\vec{e}_x - \sin\theta\,\vec{e}_z\right)}$$

9. L'énergie cinétique de $\mathcal{T}$ dans $\mathcal{R}$ est, d'après le théorème de Koenig :

$$K(\mathcal{T}/\mathcal{R}) = \frac{1}{2} m \vec{V}^2 (C,\mathcal{T}/\mathcal{R}) + \frac{1}{2} I_C \vec{\omega}^2 (\mathcal{T}/\mathcal{R}) = \frac{1}{6} m L^2 \dot{\theta}^2$$

Son énergie potentielle de pesanteur, avec origine dans le plan xOy $\left(\theta = \frac{\pi}{2}\right)$, est :

$$E_p = -m\vec{g}.\overrightarrow{OC} = \frac{1}{2} m\, g\, L \cos\theta$$

On en déduit l'énergie mécanique de la barre :

$$\boxed{E_m = \frac{1}{6} m L^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} mgL\cos\theta}$$

10. En l'absence de frottements sur les parois, l'énergie mécanique se conserve au cours du temps, ce qui se traduit, compte tenu des conditions initiales, par :

$$\frac{1}{6} m L^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} mgL\cos\theta = \frac{1}{2} mgL\cos\theta_0$$

On en déduit l'équation différentielle proposée dans l'énoncé si on pose :

$$\boxed{\tau = \sqrt{\frac{L}{3g}}}$$

11. Le théorème de la résultante cinétique - encore appelé théorème de la résultante dynamique ou théorème du centre de masse - appliqué à $\mathcal{T}$ dans $\mathcal{R}$ s'écrit, en supposant le contact en A maintenu :

$$m\left(\frac{d\vec{V}(C,\mathcal{T}/\mathcal{R})}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = m\vec{g} + \vec{R}_A + \vec{R}_B$$

On en déduit en projection suivant $\vec{e}_x$:

$$\vec{R}_A.\vec{e}_x = \frac{mL}{2}\left(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2 \sin\theta\right)$$

Or, $\dot{\theta}^2 = \frac{3g}{L}\left(\cos\theta_0 - \cos\theta\right)$ et $\ddot{\theta} = \frac{d}{d\theta}\left(\frac{\dot{\theta}^2}{2}\right) = \frac{3g}{2L}\sin\theta$. En définitive on obtient :

$$\boxed{\vec{R}_A = \frac{3mg}{4}\sin\theta\left(3\cos\theta - 2\cos\theta_0\right)\vec{e}_x}$$

12. Le théorème de la résultante cinétique en projection suivant $\vec{e}_z$ nous donne :

$$\vec{R}_B.\vec{e}_z = mg - \frac{mL}{2}\left(\ddot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta\right)$$

En exprimant $\dot{\theta}$ et $\ddot{\theta}$ en fonction de θ on obtient :

$$\boxed{\vec{R}_B = \frac{mg}{4}\left(1+9\cos^2\theta - 6\cos\theta_0\cos\theta\right)\vec{e}_z}$$

13. Le contact cesse en A pour $\theta = \theta_1$ tel que $\vec{R}_A(\theta_1).\vec{e}_x = 0$, soit :

$$\boxed{\theta_1 = \arccos\left(\frac{2}{3}\cos\theta_0\right) = 51{,}2°}$$

14. A cet instant, la composante horizontale de la vitesse de C dans $\mathcal{R}$ est :

$$\boxed{V_x(\theta_1) = \left[\vec{V}(C,\mathcal{T}/\mathcal{R}).\vec{e}_x\right]_{\theta_1} = \frac{1}{3}\sqrt{gL\cos^3\theta_0} = 0{,}52\,\text{m.s}^{-1}}$$

Diffraction. Apodisation.

15. On observe, sur l'écran placé dans le plan focal image de la lentille mince convergente, la figure de diffraction à l'infini de $\mathcal{D}$ centrée sur l'image géométrique réelle de l'étoile E_1.

16. L'amplitude complexe des ondes lumineuses diffractées dans la direction θ $(\theta \ll 1\,\text{rad})$ et reçues en un point P de l'écran est égale à la transformée de Fourier de la transmittance du diaphragme binaire :

$$\boxed{\underline{\psi}(P) = \underline{\psi}_0\int_{-a/2}^{a/2}\exp\left(-i2\pi\frac{\theta x}{\lambda}\right)dx}$$

On a $\theta \approx \dfrac{X}{f'}$ ce qui entraîne $\underline{\psi}(X) = a\underline{\psi}_0\,\text{sinc}\left(\dfrac{\pi a X}{\lambda f'}\right)$.

17. L'éclairement sur l'écran est alors $\mathcal{E}(X) = \mathcal{E}(0)\,\text{sinc}^2\left(\dfrac{\pi a X}{\lambda f'}\right)$. Cet éclairement s'annule pour $\dfrac{aX}{\lambda f'} = k \in \mathbb{N}^*$ soit aux abscisses $X_k = kd$ avec :

$$\boxed{d = \frac{\lambda f'}{a} = 6\,\mu\text{m}}$$

18. On dispose dans le plan du diaphragme une pupille de transmittance $T(x) = \cos\left(\dfrac{\pi x}{a}\right)$.

L'amplitude complexe des ondes lumineuses diffractées dans la direction q $(\theta \ll 1\,\text{rad})$ et reçues en un point P de l'écran est alors :

$$\underline{\psi}'(P) = \underline{\psi}_0\int_{-a/2}^{a/2}\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\exp(-i2\pi ux)\,dx = \frac{\underline{\psi}_0}{2}\left[\int_{-a/2}^{a/2}\exp\left(i\pi(1-2ua)\frac{x}{a}\right)dx + \int_{-a/2}^{a/2}\exp\left(-i\pi(1+2ua)\frac{x}{a}\right)dx\right]$$

On en déduit :

$$\boxed{\underline{\psi}'(P) = \frac{-\underline{\psi}_0 a}{2\pi}\frac{\cos(\pi ua)}{a^2u^2 - \frac{1}{4}}}$$

Si on rapproche ce résultat de l'expression proposée dans l'énoncé on a :

$$\boxed{k_1 = \frac{-\underline{\psi}_0 a}{2\pi}}$$

19. Et :

$$\boxed{k_2 = \frac{1}{4}}$$

20. L'éclairement sur l'écran est alors $\mathcal{E}'(X) = \mathcal{E}'(0)\left(\frac{\cos\left(\frac{\pi a X}{\lambda f'}\right)}{\left(2\frac{aX}{\lambda f'}\right)^2 - 1}\right)^2$. La plus petite valeur $X_a > 0$ qui l'annule est donc :

$$\boxed{X_a = \frac{3\lambda f'}{2a} = 9\,\mu\text{m} > d}$$

Remarque. Le maximum principal est plus large que celui produit par une fente binaire. Par contre, les maxima secondaires sont relativement moins intenses que pour une fente binaire puisque pour $u = \frac{X}{\lambda f'} \gg \frac{1}{2a}$ ils varient en $\frac{1}{u^4}$ au lieu de $\frac{1}{u^2}$. Ce phénomène porte le nom d'***apodisation*** - du grec apodos qui signifie "sans pieds" - car il minimise les maxima secondaires ou "pieds" de la figure de diffraction.

21. L'angle de diffraction correspondant est :

$$\boxed{\theta_a = \frac{X_a}{f'} = 7{,}5.10^{-7}\,\text{rad} = 0{,}15''}$$

Induction électromagnétique.

22. On est en présence d'un circuit de constitution variable plongé dans un champ magnétique uniforme et constant. La force électromotrice induite dans le circuit par ce champ extérieur est égale à la circulation du champ électromoteur de Lorentz le long du circuit. On se place dans le référentiel ou les rails sont immobiles, donc :

$$e(t) = \oint_{\mathcal{C}} \left(\vec{v}(t) \wedge \vec{B}\right).d\vec{\ell} = \int_{M'M} \left(\vec{v}(t) \wedge \vec{B}\right).d\vec{\ell} = -\int_{a/2}^{-a/2} B_0\, v(t) \cos\alpha\, dy$$

soit :

$$\boxed{e(t) = B_0 a\, v(t) \cos\alpha}$$

23. La tige mobile, parcourue par le courant i(t), subit une force de Laplace dont la composante dans le plan P' est :

$$F_{L,x'} = \vec{F}_L.\vec{e}'_x = \vec{e}'_x . \int_{M'M} \left(i(t)\, d\vec{\ell}\right) \wedge \vec{B} = \int_{a/2}^{-a/2} B_0\, i(t) \cos\alpha\, dy$$

soit :

$$\boxed{F_{L,x'} = -B_0\, a\, i(t) \cos\alpha}$$

24. Pour obtenir l'équation mécanique du système on applique le théorème de la résultante cinétique - ou théorème de la résultante dynamique ou encore théorème du centre de masse - à la tige T dans le référentiel lié aux rails et supposé galiléen. Il vient :

$$m\frac{d\vec{v}(t)}{dt} = m\vec{g} + \vec{R} + \vec{F}_L$$

Comme la tige glisse sur les rails sans frotter on obtient, en projetant cette équation selon $\vec{e}'_x$:

$$\boxed{\frac{dv(t)}{dt} = g\sin\alpha - \frac{B_0 a \cos\alpha}{m} i(t)}$$

Par identification avec l'expression proposée dans l'énoncé on en déduit successivement :

$$\boxed{h_1 = g\sin\alpha \quad , \quad h_2 = -\frac{B_0 a\cos\alpha}{m} \quad , \quad \frac{h_1}{h_2} = -\frac{mg\tan\alpha}{B_0 a}}$$

25. Pour obtenir l'équation électrique du système on utilise la loi des mailles qui nous donne :

$$e(t) = L\frac{di(t)}{dt} + Ri(t) = B_0\, a\, v(t)\cos\alpha$$

En dérivant cette équation par rapport au temps et compte tenu de l'équation mécanique, il vient :

$$\frac{d^2i(t)}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{di(t)}{dt} + \frac{(B_0 a\cos\alpha)^2}{mL}i(t) = \frac{B_0 ag}{L}\sin\alpha\cos\alpha$$

Par identification avec l'équation proposée dans l'énoncé, on obtient :

$$\boxed{\omega_0 = \frac{B_0 a\cos\alpha}{\sqrt{mL}}}$$

26. Puis :

$$\boxed{i_0 = \frac{mg}{B_0 a}\tan\alpha}$$

27. On suppose que $R = 0$ et $L \neq 0$ ce qui réduit l'équation électrique à :

$$\frac{d^2i(t)}{dt^2} + \omega_0^2 i(t) = \omega_0^2 i_0$$

Avec les condition initiales $i(0) = 0$ et $\left(\frac{di(t)}{dt}\right)_0 = 0$, elle s'intègre en :

$$i(t) = i_0\left(1 - \cos(\omega_0 t)\right)$$

On en déduit, avec $L\frac{di(t)}{dt} = B_0 a\, v(t)\cos\alpha$, la vitesse de la tige :

$$v(t) = \frac{L}{B_0 a\cos\alpha}\frac{di(t)}{dt} = \frac{L\omega_0 i_0}{B_0 a\cos\alpha}\sin(\omega_0 t) = v_0\sin(\omega_0 t)$$

En explicitant ω_0 et i_0 il vient :

$$\boxed{v_0 = \frac{g\sqrt{mL}\tan\alpha}{B_0 a}}$$

28. On suppose maintenant que $L = 0$ et $R \neq 0$. L'équation électrique se réduit alors à :

$$\frac{di(t)}{dt} + \frac{(B_0 a\cos\alpha)^2}{mR}i(t) = \frac{B_0 ag}{R}\cos\alpha\sin\alpha = \frac{(B_0 a\cos\alpha)^2}{mR}i_0$$

Elle s'intègre, avec les mêmes conditions initiales que précédemment, en :

$$i(t) = i_0\left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right)$$

si on pose :

$$\boxed{\tau = \frac{mR}{(B_0 a\cos\alpha)^2}}$$

Lentille mince convergente et doublet.

29. La lentille mince convergente $\mathcal{L}_1$ donne, d'un objet réel, une image réelle si $p = \overline{O_1A} \in \left]-\infty, -f'_1\right]$ qui conduit à $p' = \overline{O_1E} \in \left[f'_1, +\infty\right[$. A partir de la relation de conjugaison de Descartes, sachant que $D = \overline{AE}$, on obtient l'équation du seconde degré en p :

$$p^2 + Dp + Df'_1 = 0$$

Cette équation admet des solutions réelles négatives si $\Delta = D(D-4f'_1) \geq 0$ ce qui implique :

$$\boxed{D \geq 4f'_1}$$

Remarque. Voir la méthode de Bessel.

30. On a, par définition du grandissement transversal, $G_t = \dfrac{\overline{O_1E}}{\overline{O_1A}} = \dfrac{\overline{O_1E}}{\overline{O_1E}+\overline{EA}} = \dfrac{\overline{O_1E}}{\overline{O_1E}-D} = -2$. On en déduit :

$$\boxed{\overline{O_1E} = \frac{2}{3}D}$$

31. On a : $A \xrightarrow{\mathcal{L}_1} A'_1 = E \xrightarrow{\mathcal{L}_2} A'_2$. La formule de conjugaison de Descartes appliquée à la lentille $\mathcal{L}_2$ nous conduit à :

$$\overline{O_2A'_1} = \overline{O_2E} = \frac{f'_2 . \overline{O_2A'_2}}{f'_2 - \overline{O_2A'_2}}$$

Comme par ailleurs : $\overline{O_2E} = \overline{O_2O_1} + \overline{O_1E} = \overline{O_2O_1} + \frac{2}{3}D$, on en déduit :

$$\boxed{D = \frac{3}{2}\left(\frac{f'_2 . \overline{O_2A'_2}}{f'_2 - \overline{O_2A'_2}} + \overline{O_1O_2}\right) = 81\,\text{cm}}$$

32. La formule de conjugaison de Descartes appliquée à la lentille $\mathcal{L}_1$ nous conduit à :

$$\boxed{f'_1 = \frac{\overline{O_1E}.\overline{O_1A}}{\overline{O_1A} - \overline{O_1E}} = \frac{2}{9}D = 18\,\text{cm}}$$

33. Tout rayon issu du foyer objet F du doublet émerge de $\mathcal{L}_2$ parallèlement à l'axe optique. F admet donc le foyer objet F_2 de la lentille $\mathcal{L}_2$ comme conjugué image à travers $\mathcal{L}_1$. Avec la formule de conjugaison des Descartes il vient :

$$\boxed{\overline{O_1F} = \frac{f'_1 . \overline{O_1F}}{f'_1 - \overline{O_1F_2}} = \frac{f'_1\left(\overline{O_1O_2} - f'_2\right)}{f'_2 + f'_2 - \overline{O_1O_2}} = 5{,}14\,\text{cm}}$$

34. Tout rayon incident parallèle à l'axe optique émerge du doublet en passant par F'. Le foyer image F' du doublet est donc le conjugué image du foyer image F'_1 de la lentille $\mathcal{L}_1$ à travers $\mathcal{L}_2$. En utilisant de nouveau la formule de conjugaison de Descartes il vient :

$$\overline{O_2F'} = \frac{f'_2 . \overline{O_2F'_2}}{f'_2 + \overline{O_2F'_2}} = \frac{f'_2\left(f'_1 - \overline{O_1O_2}\right)}{f'_1 + f'_2 - \overline{O_1O_2}}$$

Il en résulte que :

$$\boxed{\overline{O_1F'} = \overline{O_1O_2} + \overline{O_2F'} = \overline{O_1O_2} + \frac{f'_2\left(f'_1 - \overline{O_1O_2}\right)}{f'_1 + f'_2 - \overline{O_1O_2}} \approx 11\,\text{cm}}$$

Remarque. On peut aussi déterminer $\overline{F'_2F'}$ en utilisant la formule de conjugaison de Newton puis en déduire $\overline{O_1F'}$.

Filtre du premier ordre généralisé.

35. On est en présence d'un diviseur de tension constitué de deux dipôles d'admittances :

$$\underline{Y}_1 = \frac{1}{R_1} + jC_1\omega \quad , \quad \underline{Y}_2 = \frac{1}{R_2} + jC_2\omega$$

Sa fonction de transfert est donc :

$$\boxed{\underline{H}(j\omega)=\frac{\underline{u}_s}{\underline{u}_e}=\frac{1}{1+\dfrac{\underline{Y}_2}{\underline{Y}_1}}=\frac{R_2}{R_1+R_2}\frac{1+jC_1R_1\omega}{1+j\omega\dfrac{(C_1+C_2)R_1R_2}{R_1+R_2}}}$$

Par identification avec la fonction de transfert proposée dans l'énoncé on obtient :

$$\boxed{\omega_1=\frac{1}{R_1C_1}=2.10^3\,\text{rad.s}^{-1}}$$

36. Par ailleurs :

$$\boxed{\omega_2=\frac{R_1+R_2}{(C_1+C_2)R_1R_2}}$$

37. Le gain sera indépendant de la fréquence du signal d'entrée si $\omega_1=\omega_2$ ce qui impose :

$$\boxed{C_2=C_1\frac{R_1}{R_2}=50\,\text{nF}}$$

38. Dans ce cas, le gain en décibel vaut :

$$\boxed{G(\text{dB})=20\log H_0=20\log\left(\frac{R_2}{R_1+R_2}\right)=-3,52\,\text{dB}}$$

39. Lorsque $\omega=\omega_1$, la fonction de transfert s'écrit :

$$\underline{H}(j\omega_1)=H_0\frac{1+j}{1+j\dfrac{\omega_1}{\omega_2}}=H_0\frac{1+j}{1+j\dfrac{R_2(C_1+C'_2)}{C_1(R_1+R_2)}}$$

L'argument $\varphi=\varphi_s-\varphi_e$ de la fonction de transfert représente l'avance de phase de la sortie par rapport à l'entrée. On veut que :

$$\varphi=\frac{\pi}{4}-\arctan\left(\frac{R_2(C_1+C'_2)}{C_1(R_1+R_2)}\right)=-\frac{\pi}{12}$$

ce qui nécessite :

$$\boxed{C'_2=C_1\left(\sqrt{3}\left(1+\frac{R_1}{R_2}\right)-1\right)=159,8\,\text{nF}}$$

40. Avec les résultats précédents la fonction de transfert, pour $\omega=\omega_1$, s'écrit :

$$\underline{H}(j\omega_1)=\frac{2}{3}\frac{1+j}{1+j\sqrt{3}}$$

On en déduit le gain en décibel :

$$\boxed{G'(\text{dB})=20\log\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)=-6,53\,\text{dB}}$$

-:-:-:-:-