

ICNA - SESSION 2010

ÉPREUVE COMMUNE DE PHYSIQUE

CORRIGÉ

Cycle de Diesel.

1. L'air est assimilé à un gaz parfait d'équation d'état $pV = \frac{m}{M}RT = nrT$. Connaissant la pression, le volume et la température dans l'état initial on en déduit la masse d'air qui subit le cycle de Diesel :

$$m = \frac{p_A V_A}{r T_A} = 2,90g$$

2. La transformation $A \rightarrow B$ est une compression isentropique. A l'aide de la formule de Laplace, exprimée à l'aide des variables T et V, $TV^{\gamma-1} = Cte$ on obtient :

$$V_B = V_A \left(\frac{T_A}{T_B} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} = 0,12L$$

Si on utilise les variables T et p on a $T^\gamma / p^{\gamma-1} = Cte$ ce qui nous conduit à :

$$p_B = p_A \left(\frac{T_B}{T_A} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = 71,24 \cdot 10^5 Pa$$

3. La combustion, qui amène de l'état B à l'état C, s'effectue à pression constante ; on a donc :

$$p_C = p_B$$

et, d'après l'équation d'état du gaz parfait :

$$T_C = T_B \frac{V_C}{V_B} = T_A \left(\frac{T_B}{T_A} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \frac{V_C}{V_A} = 4530K$$

La transformation $C \rightarrow D$ est une détente isentropique. A l'aide des formules de Laplace, compte tenu que $V_D = V_A$ ($D \rightarrow A$: *refroidissement isochore*) on obtient respectivement :

$$T_D = T_C \left(\frac{V_C}{V_D} \right)^{\gamma-1} = T_C \left(\frac{V_C}{V_A} \right)^{\gamma-1} = T_A \left(\frac{T_B}{T_A} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \left(\frac{V_C}{V_A} \right)^{\gamma} = 2436K$$

$$p_D = p_C \left(\frac{V_C}{V_D} \right)^{\gamma} = p_B \left(\frac{V_C}{V_A} \right)^{\gamma} = p_A \left(\frac{V_C}{V_B} \right)^{\gamma} = 8,12p_A$$

4. Le cycle de Diesel est représenté par le diagramme de Clapeyron C.

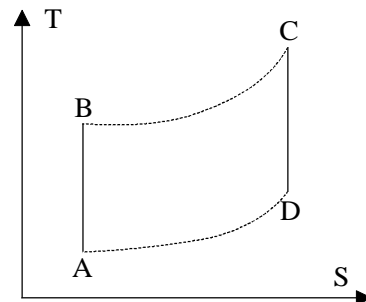
5. Dans le diagramme entropique :

les isentropiques ($S = Cte$) sont des droites verticales ;

les équations d'une isobare et d'une isochore sont respectivement de la forme :

$$T \propto \exp\left(\frac{S}{C_p}\right) \quad \text{et} \quad T \propto \exp\left(\frac{S}{C_v}\right)$$

Le cycle de Diesel est donc représenté par le diagramme entropique ci-contre.



6. Au cours d'un cycle l'air reçoit, de la part de la source chaude, une quantité de chaleur :

$$Q_c = \Delta H_{B \rightarrow C} = \frac{mr\gamma}{\gamma-1}(T_C - T_B) = \frac{mr\gamma}{\gamma-1}T_B \left(\frac{V_C}{V_B} - 1 \right) = 10 \text{kJ}$$

7. La quantité de chaleur reçue de la source froide est :

$$Q_f = \Delta U_{D \rightarrow A} = \frac{mr}{\gamma-1}(T_A - T_D) = \frac{p_A V_A}{\gamma-1} \left(1 - \left(\frac{T_B}{T_A} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \left(\frac{V_C}{V_A} \right)^{\gamma} \right) = -4,45 \text{kJ}$$

Il en résulte que le travail reçu au cours du cycle par le fluide est :

$$W = -(Q_f + Q_c)$$

soit :

$$W = -\frac{mr}{\gamma-1}((T_A - T_D) + \gamma(T_C - T_B)) = -\frac{p_A V_A}{(\gamma-1)T_A}(T_A - T_D + \gamma(T_C - T_B)) = -5,7 \text{kJ}$$

8. L'efficacité du moteur est donc :

$$\eta = \frac{-W}{Q_c} = 1 + \frac{Q_f}{Q_c} = 0,57$$

On peut montrer que cette efficacité ne dépend que du taux de compression et du rapport de détente.

9. Le bilan entropique au cours de la détente isochore se traduit par :

$$\Delta S_{D \rightarrow A} = \frac{Q_f}{T_A} + S^p$$

avec :

$$\Delta S_{D \rightarrow A} = \frac{mr}{\gamma-1} \int_{T_D}^{T_A} \frac{dT}{T} = \frac{mr}{\gamma-1} \ln \left(\frac{T_A}{T_D} \right)$$

On en déduit l'entropie produite au cours de cette transformation :

$$S^p = \Delta S_{D \rightarrow A} - \frac{Q_f}{T_A} = \frac{mr}{\gamma-1} \left(\ln \left(\frac{T_A}{T_D} \right) - \frac{(T_A - T_D)}{T_A} \right) = 10,5 \text{J.K}^{-1}$$

10. La fonction entropie est une fonction d'état donc :

$$\Delta S_{\text{cycle}} = 0 = \int_{T_B}^{T_C} \frac{\delta Q_c}{T} + \frac{Q_f}{T_A} + S^p$$

Le cycle est irréversible ce qui n'apparaît pas dans le calcul de l'efficacité car on n'a pas tenu compte du bilan entropique.

Électronique : filtres.

Les circuits (1) et (2) sont des filtres en **structure de Rauch**. Les A.O. sont supposés idéaux ($i_+ = i_- = 0$) et fonctionnant en régime linéaire ($V_+ = V_-$).

11. On rappelle l'expression de l'impédance complexe d'un condensateur parfait soumis à une tension harmonique de pulsation ω : $Z_C = \frac{1}{jC\omega}$ Ainsi :

en basse fréquence on assimile un condensateur à un coupe-circuit (interrupteur ouvert) ;

en haute fréquence on assimile un condensateur à un court-circuit (interrupteur fermé).

Il en résulte, pour le circuit (3), que :

$$V_S = V_E \text{ quand } f \rightarrow +\infty ;$$

$$V_S = 0 \text{ quand } f \rightarrow 0^+ .$$

Ce circuit se comporte comme un filtre passe-haut.

12. On utilise le comportement d'un condensateur en basse et haute fréquences pour déterminer, qualitativement la nature des circuits (1) et (2).

a) Circuit (1) :

lorsque $f \rightarrow 0^+$ les condensateurs sont des coupe-circuits, la tension d'entrée est nulle, donc de même pour la tension de sortie ;

lorsque $f \rightarrow +\infty$ les condensateurs sont des courts-circuits, on a $V_s = V_E$ car la sortie est directement reliée à E par un fil.

Ce circuit est un **filtre passe-haut**.

b) Circuit (2) :

lorsque $f \rightarrow 0^+$ les condensateurs sont des coupe-circuits, la tension d'entrée est nulle, donc de même pour la tension de sortie ;

lorsque $f \rightarrow +\infty$ les condensateurs sont des courts-circuits, on a $V_s = V_- = V_+ = 0$ car N est directement relié à la sortie par un fil.

Ce circuit est un **filtre passe-bande**.

13. On applique le théorème de Millman respectivement en N et en A, d'où :

$$\underline{V}_N = \frac{\underline{V}_S + jCR\omega \underline{V}_A}{1 + jCR\omega} \quad \text{et} \quad \underline{V}_A = \frac{jCR\omega(\underline{V}_E + \underline{V}_S + \underline{V}_N)}{1 + 3jCR\omega}$$

Or : $\underline{V}_N = \underline{V}_- = \underline{V}_+ = 0$. Par élimination de \underline{V}_A on obtient la fonction de transfert :

$$\underline{H}_1(j\omega) = \frac{\underline{V}_S}{\underline{V}_E} = \frac{(CR\omega)^2}{1 + 3jCR\omega - (CR\omega)^2}$$

soit encore en posant $x = CR\omega$ (pulsation réduite, nombre sans dimension) :

$$\underline{H}_1(jx) = \frac{\underline{V}_S}{\underline{V}_E} = \frac{x^2}{1 + 3jx - x^2}$$

Cette fonction de transfert est de la forme $\underline{H}_1(jx) = \frac{x^2}{1 + j\frac{x}{Q} - x^2}$ d'où le facteur de qualité :

$$Q = \frac{1}{3}$$

La pulsation de coupure réduite à -3dB , x_1 , est solution de :

$$G_1(x_1) = |\underline{H}_1(x_1)| = \frac{G_{1\max}}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{x_1^2}{\sqrt{1 + 7x_1^2 + x_1^4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

soit :

$$x_1^4 - 7x_1^2 - 1 = 0$$

On ne retient évidemment que la seule solution positive :

$$x_1 = \sqrt{\frac{7 + \sqrt{53}}{2}} = 2,67$$

14. Si $x \rightarrow 0^+$ ($\omega \rightarrow 0^+$) alors $\underline{H}_1(jx) \rightarrow x^2$ ($\rightarrow 0^+$) ce qui nous donne :

$$G_1(\text{dB}) \rightarrow 20 \log x^2 = 40 \log x : \text{pente asymptotique de } 40 \text{ dB/décade} ;$$

$$\varphi_1 = \arg(\underline{H}_1) \rightarrow 0.$$

Si $x \rightarrow +\infty$ ($\omega \rightarrow +\infty$) alors $\underline{H}_1(jx) \rightarrow -1$ ce qui nous donne :

$$G_1(\text{dB}) \rightarrow 0 : \text{asymptote horizontale} ;$$

$$\varphi_1 = \arg(\underline{H}_1) \rightarrow -\frac{\pi}{2}.$$

16. On applique le théorème de Millman respectivement en N et A, d'où :

$$\underline{V}_N = \frac{V_S + jCR\omega V_A}{1 + jCR\omega} \quad \text{et} \quad \underline{V}_A = \frac{jCR\omega(\underline{V}_S + \underline{V}_N) + \underline{V}_E}{2 + 2jCR\omega}$$

Or : $\underline{V}_N = \underline{V}_- = \underline{V}_+ = 0$. Par élimination de \underline{V}_A on obtient la fonction de transfert :

$$\underline{H}_2(j\omega) = \frac{\underline{V}_S}{\underline{V}_E} = \frac{jCR\omega}{(CR\omega)^2 - 2jCR\omega - 2}$$

soit encore en posant $x = CR\omega$ (pulsation réduite, nombre sans dimension) :

$$\underline{H}_2(jx) = \frac{\underline{V}_S}{\underline{V}_E} = \frac{jx}{x^2 + 2jx - 2}$$

16. Le gain en tension est défini par :

$$G_2(x) = |\underline{H}_2(jx)| = \frac{1}{\sqrt{x^2 + \frac{4}{x^2}}}$$

Ce gain est maximal lorsque le dénominateur est minimal, c'est-à-dire quand $x^2 = \frac{4}{x^2}$, soit pour :

$$x_0 = \sqrt{2}$$

C'est la pulsation réduite de **résonance**.

La valeur maximale du gain est donc :

$$G_{2\max} = 0,5$$

17. Les pulsations réduites de coupure à -3dB sont les valeurs de x_2 , positives, solutions de :

$$\frac{1}{\sqrt{x_2^2 + \frac{4}{x_2^2}}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \Rightarrow x_2^4 - 8x_2^2 + 4 = 0$$

soit :

$$x_{2-} = \sqrt{4 - \sqrt{12}} = 0,73 \quad , \quad x_{2+} = \sqrt{4 + \sqrt{12}} = 2,73$$

On en déduit le facteur de qualité du filtre :

$$Q = \frac{x_0}{\Delta x_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

18. Si $x \rightarrow 0^+$ alors $G_2(\text{dB}) \rightarrow 20 \log \sqrt{x^2} = 20 \log x$: pente asymptotique de $20\text{dB}/\text{décade}$.

Si $x \rightarrow +\infty$ alors $G_2(\text{dB}) \rightarrow 20 \log \frac{1}{\sqrt{x^2}} = -20 \log x$: pente asymptotique de $-20\text{dB}/\text{décade}$.

19. Si $x \rightarrow 0^+$ alors $\underline{H}_2(jx) \rightarrow -j\frac{x}{2}$ donc $\varphi_2 = \arg(\underline{H}_2) \rightarrow -\frac{\pi}{2}$.

Si $x \rightarrow +\infty$ alors $\underline{H}_2(jx) \rightarrow \frac{j}{x}$ donc $\varphi_2 = \arg(\underline{H}_2) \rightarrow +\frac{\pi}{2}$.

20. Le filtre passe-bande est évidemment plus sélectif que les filtres passe-haut.

Électromagnétisme.

21. Le fil conducteur, supposé infiniment long, est confondu avec l'axe Oz. Toute rotation autour de Oz et toute translation parallèlement à cet axe laisse la distribution de courant invariante. Le champ magnétique créé dépend uniquement de la variable spatiale ρ , distance du fil au point considéré :

$$\vec{B}(M) = \vec{B}(\rho) .$$

Le plan contenant l'axe Oz et passant par M est plan de symétrie pour la distribution de courant, donc le champ magnétique, pseudo-vecteur, est orthogonal ce plan donc orthoradial.

En définitive :

$$\boxed{\vec{B}(M) = B_\varphi(\rho) \vec{e}_\varphi}$$

22. Pour déterminer le champ magnétique on applique le théorème d'Ampère sur un contour circulaire C d'axe Oz, de rayon r, appartenant à un plan z = Cte.

23. Le théorème d'Ampère se traduit par $2\pi\rho B_\varphi(\rho) = \mu_0 I$ ce qui nous conduit, compte tenu que $\rho > 0$, à :

$$\boxed{\|\vec{B}(M)\| = B_\varphi(\rho) = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}}$$

Attention. On a $OM = \|\vec{OM}\| = \rho$ uniquement si on suppose que O est la projection orthogonale de M sur l'axe Oz.

24. Toute rotation autour de Oz et toute translation parallèlement à cet axe laisse la distribution de courant invariante. Le potentiel-vecteur créé dépend uniquement de la variable spatiale ρ , distance du fil au point considéré :

$$\vec{A}(M) = \vec{A}(\rho)$$

Un plan perpendiculaire à l'axe Oz et passant par M est plan d'antisymétrie pour la distribution de courant. Le potentiel-vecteur, vecteur vrai, est orthogonal à ce plan ; il est donc axial.

En définitive :

$$\boxed{\vec{A}(M) = A_z(\rho) \vec{e}_z}$$

25. Le théorème de Stokes nous permet d'écrire :

$$\boxed{\iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \iint_S \text{rot } \vec{A} \cdot d\vec{S} = \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{\ell}}$$

S est une surface ouverte qui s'appuie sur le contour fermé C.

C est un contour rectangulaire appartenant à un plan contenant Oz et dont deux côtés sont parallèles à Oz.

26. Les côtés du contour rectangulaire C ont pour dimensions respectives dr et dz. La relation intégrale précédente nous donne :

$$B_\varphi(\rho) d\rho dz = [A_z(\rho) - A_z(\rho + d\rho)] dz = -\frac{dA_z(\rho)}{d\rho} d\rho dz$$

On en déduit :

$$\boxed{A_z(\rho) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln\left(\frac{1}{\rho}\right) + K}$$

Attention, $\|\vec{A}(M)\| = |A_z(\rho)|$

27. Le cadre est rigide et le champ magnétique stationnaire. Le flux coupé par le cadre au cours de son déplacement est donc égal au flux Φ du champ magnétique à travers le cadre. Ce flux est constant car le

cadre reste dans le plan du fil à distance invariable de celui-ci. La loi de Faraday, $e = -\frac{d\Phi}{dt}$, montre que

la f.é.m. induite dans le cadre est nulle, il n'apparaît donc pas de courant induit.

28. Dans ce cas le cadre s'éloigne du fil donc le flux Φ du champ magnétique n'est plus constant (il diminue avec l'intensité du champ magnétique). Il en résulte, d'après la loi de Faraday, une f.é.m. induite donc un courant induit. Ce dernier est variable et, en accord avec la loi de Lenz, circule dans le cadre dans le sens $P \rightarrow Q \rightarrow R \rightarrow S \rightarrow P$.

29. Le champ électromoteur de Lorentz, en un point du cadre situé à la distance ρ du fil, est :

$$\vec{E}_m = \vec{v} \wedge \vec{B} = \frac{\mu_0 I v_0}{2\pi} \frac{1}{\rho} \vec{e}_z$$

La f.é.m. induite est égale à la circulation du champ électromoteur le long du cadre, soit :

$$\boxed{e_i = \oint_{\vec{e}_z} \vec{E}_m \cdot d\vec{\ell} = \int_0^b \frac{\mu_0 I v_0}{\pi(2L-a)} dz + \int_b^0 \frac{\mu_0 I v_0}{\pi(2L+a)} dz}$$

Il faut noter que L dépend du temps selon $L = L_0 + v_0 t$ donc l'intensité du courant induit dans le cadre, dont on néglige l'inductance propre, est $i = \frac{e_i}{r} = \frac{\mu_0 I v_0 b}{\pi r} \frac{2a}{4L^2(t) - a^2}$.

Remarque. Si on effectue le calcul à partir du flux du champ magnétique, on a :

$$\Phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_0^b dz \int_{L-a/2}^{L+a/2} \frac{d\rho}{\rho} = \frac{\mu_0 I b}{2\pi} \ln\left(\frac{2L+a}{2L-a}\right)$$

On en déduit la f.é.m. induite dans le cadre par la loi de Faraday :

$$e_i = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d\Phi}{dL} \cdot \frac{dL}{dt} = \frac{\mu_0 I b v_0}{\pi} \frac{2a}{4L^2 - a^2}$$

30. La spire circulaire plane, d'axe Oz , est située dans un plan $z = \text{Cte}$. Le flux du champ magnétique, orthoradial, à travers cette spire, en rotation autour de Oz , est donc nul : il n'y a donc ni f.é.m. induite ni courant induit dans la spire.

Mécanique du solide.

Dans un premier temps le prisme \mathcal{P} est immobile dans \mathcal{R}_0 .

31. Le théorème de la résultante dynamique appliqué à \mathcal{D} dans \mathcal{R}_0 se traduit par :

$$m\vec{a}(C, \mathcal{D}/\mathcal{R}_0) = m\vec{g} + \vec{T} + \vec{N}$$

En projection respectivement selon \vec{e}_x et \vec{e}_z on obtient :

$$\boxed{m\ddot{x}_C = T + mg \sin \alpha} \quad \text{et} \quad \boxed{N = mg \cos \alpha}$$

Le théorème du moment cinétique barycentrique appliqué à \mathcal{D} s'écrit :

$$\left(\frac{d\vec{\sigma}(C, \mathcal{D}/\mathcal{R}^*)}{dt} \right)_{\mathcal{R}^*} = \vec{M}_{\text{ext}}(C)$$

avec $\vec{\sigma}(C, \mathcal{D}/\mathcal{R}^*) = \frac{1}{2} mR^2 \dot{\varphi} \vec{e}_y$ et $\vec{M}_{\text{ext}}(C) = \vec{CC} \wedge m\vec{g} + \vec{CI} \wedge (\vec{T} + \vec{N}) = -RT\vec{e}_y$.

Il en résulte que :

$$\boxed{T = -\frac{1}{2} mR\dot{\varphi}}$$

32. La condition de roulement sans glissement de \mathcal{D} sur \mathcal{P} immobile dans \mathcal{R}_0 se traduit par :

$$\vec{U}_g = \vec{V}(I, \mathcal{D}/\mathcal{P}) = \vec{V}(C, \mathcal{D}/\mathcal{P}) + \vec{\omega}(\mathcal{D}/\mathcal{P}) \wedge \vec{CI} = \vec{0}$$

On en déduit :

$$\boxed{\dot{x}_C = R\dot{\varphi}}$$

33. Les relations précédentes nous conduisent à :

$$\boxed{T = -\frac{1}{3} mg \sin \alpha}$$

En l'absence de glissement nous avons, d'après les lois de Coulomb-Morin, $\|\vec{T}\| < f \|\vec{N}\|$. Il en résulte que le coefficient de frottement de glissement est tel que :

$$\boxed{\tan \alpha < 3f}$$

34. Si le roulement de \mathcal{D} sur \mathcal{P} s'effectue avec glissement les relations obtenues à la question 31 ne sont pas modifiées car elles ont été établies sans faire l'hypothèse du glissement ou du non glissement.

35. Par contre nous avons maintenant :

$$\boxed{\|\vec{T}\| = f \|\vec{N}\| = fmg \cos \alpha}$$

36. Dans cette phase de roulement avec glissement on a $\ddot{x}_C = Cte > 0$ et $\ddot{\phi} = Cte > 0$. Les relations précédentes nous conduisent, compte tenu des conditions initiales $\dot{x}_C(0) = 0$ et $\dot{\phi}(0) = 0$, à :

$$\dot{x}_C(t) = g \cos \alpha (\tan \alpha - f) t \quad \text{et} \quad \dot{\phi}(t) = \frac{2gf \cos \alpha}{R} t$$

On en déduit l'expression de la vitesse de glissement :

$$\vec{U}_g = g \cos \alpha (\tan \alpha - 3f) t \vec{e}_x$$

Donc le glissement est réalisable uniquement si et seulement si $\tan \alpha > 3f$. La vitesse de glissement est dirigée suivant \vec{e}_x , donc en sens opposé à la force de frottement $\vec{T} = T\vec{e}_x$ ($T < 0$) conformément aux lois du frottement de glissement.

On considère maintenant, qu'à l'instant initial, le prisme glisse sans frottement sur le plan horizontal avec une accélération constante. \mathcal{D} roule sans glisser sur \mathcal{P} .

37. On se place dans le référentiel non galiléen \mathcal{R} lié au prisme.

Le théorème de la résultante dynamique appliqué à \mathcal{D} dans \mathcal{R} se traduit par :

$$m\vec{a}(C, \mathcal{D} / \mathcal{R}) = m\vec{g} + \vec{T} + \vec{N} + \vec{f}_{ie}$$

En projection respectivement selon \vec{e}_x et \vec{e}_z on obtient :

$$\left| \begin{array}{l} m\ddot{x}_C = T + mg \sin \alpha - ma \cos \alpha \\ N = mg \cos \alpha + ma \sin \alpha \end{array} \right.$$

Le théorème du moment cinétique barycentrique appliqué à \mathcal{D} nous conduit à la même relation que lorsque le prisme était immobile soit :

$$\left| T = -\frac{1}{2} mR\ddot{\phi} \right.$$

38. Le théorème de la résultante dynamique appliqué au système $\Sigma = \mathcal{D} \cup \mathcal{P}$ dans \mathcal{R}_0 se traduit par :

$$M\vec{a}(G, \mathcal{P} / \mathcal{R}_0) + m\vec{a}(C, \mathcal{D} / \mathcal{R}_0) = (M + m)\vec{g} + \vec{N}'$$

On obtient en projection suivant \vec{e}_{x_0} :

$$\left| (M + m)a + m\ddot{x}_C \cos \alpha = 0 \right.$$

39. La condition de roulement sans glissement de \mathcal{D} sur \mathcal{P} n'est pas modifiée, soit :

$$\left| \dot{x}_C = R\dot{\phi} \right.$$

Il en résulte, avec les relations obtenues à la question 37, que :

$$\left| T = -\frac{m}{3} (g \sin \alpha - a \cos \alpha) \right.$$

40. De $\|\vec{T}\| < f \|\vec{N}\|$ on déduit :

$$\left| \left| \tan \alpha - \frac{a}{g} \right| < 3f \left(1 + \frac{a}{g} \tan \alpha \right) \right.$$

Remarque. Ces deux dernières questions sont sans intérêt Il était préférable de continuer, à partir de 38, pour déterminer \ddot{x}_C .

---:---:---