ICNA - SESSION 2010
ÉPREUVE OPTIONNELLE DE PHYSIQUE
CORRIGÉ

Statique des fluides.

1. La relation fondamentale de la statique des fluides dans le référentiel d'étude supposé galiléen, $\rho_e\vec{g}_0 - \overrightarrow{\text{grad}}\,p = \vec{0}$, nous montre que les surfaces isobares sont les plans orthogonaux à $\vec{g}_0$. On a donc $p = p(z)$ ce qui nous conduit en projection selon l'axe Oz à :

$$\frac{dp(z)}{dz} = -\rho_e g_0$$

Compte tenu de la continuité de la pression à l'interface air/eau, soit $p(h) = p_0$, la relation précédente s'intègre en :

$$\boxed{p(z) = p_0 + \rho_e g_0 (h - z)}$$

2. La symétrie de révolution du dispositif implique que la résultante des forces de pression exercées par l'eau et l'air sur l'entonnoir est dirigée suivant $\vec{e}_z$, soit $\vec{F} = F_z\vec{e}_z$. Ainsi on a :

$$F_z = \iint_S d\vec{F}.\vec{e}_z = \iint_S \big(p(z) - p_0\big)\big(d\vec{S}.\vec{e}_z\big)$$

avec $d\vec{S} = dS\left(\cos\theta\,\vec{e}_r + \sin\theta\,\vec{e}_z\right)$, d'où :

$$\boxed{F_z = \iint_S \big(p(z) - p_0\big)\sin\theta\, dS}$$

3. On a $r = (H - z)\tan\theta$ (*équation du cône*) et $d\ell = \dfrac{dz}{\cos\theta}$ ce qui nous conduit à :

$$\boxed{dS = 2\pi\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}(H - z)\,dz}$$

4. La résultante F_z est donc telle que :

$$F_z = 2\pi\rho_e g_0 \tan^2\theta \int_0^h \left(z^2 - (H + h)z + Hh\right)dz$$

Si on effectue le changement de variable défini par $u = \dfrac{z}{h}$ l'intégrale précédente se met sous la forme :

$$F_z = 2\pi\rho_e g_0 h^3 \tan^2\theta \int_0^1 \left(u^2 - \left(1 + \frac{H}{h}\right)u + \frac{H}{h}\right)du$$

C'est l'expression proposée par l'énoncé si on pose :

$$\boxed{F_0 = 2\pi\rho_e g_0 h^3 \tan^2\theta}$$

5. Et :

$$\boxed{k = \frac{H}{h}}$$

6. En définitive il vient :

$$F_z = \pi\rho_e g_0 h^3 \tan^2\theta\left(\frac{H}{h} - \frac{1}{3}\right)$$

soit numériquement :

$$\boxed{F_z = 1,75\,\text{N}}$$

7. Pour que l'eau ne s'écoule pas par la base de l'entonnoir il faut que ce dernier ne puisse pas décoller de son plan d'appui Il est donc nécessaire que sa masse m soit telle que :

$$\boxed{m \geq m_{min} = \frac{F_z}{g} = 179\,\text{g}}$$

Électronique.

8. On est en présence d'une structure de ***Sallen-Key***.
L'AO est supposé idéal et fonctionne en régime linéaire donc $i_+ = i_- = 0$ et $v_+ = v_-$.

Quand $f \to 0^+$ le condensateur parfait est équivalent à un interrupteur ouvert ; il en résulte que $u_s \to 0^+$.

Quand $f \to +\infty$ le condensateur parfait est équivalent à un interrupteur fermé ; il en résulte que $u_s \to 0^+$.
Le système se comporte donc comme un ***filtre passe-bande***.

9. On applique le théorème de Millman respectivement en A (*point de jonction des deux résistances et du condensateur*), E_+ et E_- ce qui nous donne :

$$\underline{u}_A = \frac{\underline{u}_e + \underline{u}_s + jCR\omega\underline{v}_+}{2 + jCR\omega} \quad , \quad \underline{v}_+ = \frac{jCR\omega\underline{u}_A}{1 + 2jCR\omega} \quad , \quad \underline{v}_- = \frac{1}{2}\underline{u}_s$$

Par élimination de $\underline{u}_A$ et compte tenu que $\underline{v}_+ = \underline{v}_-$ on en déduit la fonction de transfert harmonique :

$$\boxed{\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{u}_s}{\underline{u}_e} = \frac{jCR\omega}{1 + \frac{3}{2}jCR\omega + \left(j\frac{CR\omega}{\sqrt{2}}\right)^2}}$$

On peut écrire cette fonction de transfert sous la forme :

$$\underline{H}(jx) = H_0 \frac{jx/Q}{1 + jx/Q - x^2}$$

où $x = \dfrac{\omega}{\omega_c}$ à condition de poser :

$$\boxed{\omega_c = \frac{\sqrt{2}}{RC}}$$

10. Ainsi que :

$$\boxed{Q = \frac{\sqrt{2}}{3}}$$

facteur de qualité du circuit.

11. Et :

$$\boxed{H_0 = \frac{2}{3}}$$

12. Le gain en tension du circuit est :

$$G_v(x) = \left|\underline{H}(jx)\right| = \frac{H_0}{\sqrt{1 + Q^2\left(x - \frac{1}{x}\right)^2}}$$

Il est maximal pour x = 1 et vaut alors $(G_v)_{max} = H_0$.
Pour déterminer la bande passante à -3dB de ce filtre on cherche les valeurs de x solutions de :

$$G_v(x) = \frac{(G_v)_{max}}{\sqrt{2}} = \frac{H_0}{\sqrt{2}}$$

ce qui nous conduit aux équations du second degré en x :

$$x^2 \mp \frac{1}{Q}x - 1 = 0$$

Seules sont acceptables les solutions positives, soit :

$$x_1 = \frac{-1}{2Q} + \sqrt{\frac{1}{4Q^2}+1} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{1}{2Q} + \sqrt{\frac{1}{4Q^2}+1}$$

On en déduit la bande passante :

$$\boxed{\Delta\omega = \left(x_2 - x_1\right)\omega_c = \frac{\omega_c}{Q} = \frac{3}{RC}}$$

13. On rappelle les équivalences : $j\omega \leftrightarrow \frac{d}{dt}$ et $\frac{1}{j\omega} \leftrightarrow \int dt$.

En basse fréquence la fonction de transfert est telle que :

$$\underline{H}\left(j\omega\right) = \frac{\underline{u}_s}{\underline{u}_e} \approx jCR\omega$$

Le filtre se comporte alors comme un ***dérivateur***.
En haute fréquence la fonction de transfert est telle que :

$$\underline{H}\left(j\omega\right) = \frac{\underline{u}_s}{\underline{u}_e} \approx \frac{2}{jCR\omega}$$

Le filtre se comporte alors comme un ***intégrateur***.

14. Pour $\omega = 2\omega_c$ soit x = 2 on obtient $G_v\left(x=2\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^{3/2}$, ce qui nous donne :

$$\boxed{u_{s,m} = \left(\frac{2}{3}\right)^{3/2} u_{e,m} = 3{,}3V}$$

Mouvement d'un véhicule automobile.

***Attention**, cet énoncé présente des ambiguïtés.*

***a)** I_0 n'est pas le moment d'inertie d'une roue par rapport à son axe de rotation instantané mais par rapport à l'axe passant par son centre. Effectivement l'axe instantané de rotation d'une roue est l'axe $\left(I_k, \vec{e}_y\right)$ $\left(k=1,2\right)$ où **I_k** est le point de contact de la roue sur le sol.*

***b)** Que représente $\vec{R}_1$ (respectivement $\vec{R}_2$) ? Est-ce l'action de contact du sol sur l'ensemble des deux roues avant (respectivement deux roues arrière) ou sur une seule roue avant (respectivement arrière) ? Compte tenu des résultats proposés on peut penser que c'est la première hypothèse qu'il faut retenir.*

15. On note $\mathcal{R}$ le référentiel terrestre supposé galiléen, S le châssis, Σ le véhicule et D_k $\left(k=1,2\right)$ une roue . La condition de roulement sans glissement de la roue D_k se traduit par :

$$\vec{V}\left(I_k, D_k/\mathcal{R}\right) = \vec{V}\left(C_k, D_k/\mathcal{R}\right) + \vec{\omega}\left(D_k/\mathcal{R}\right) \wedge \overrightarrow{C_kI_k} = \vec{0}$$

Sachant que $\vec{\omega}\left(D_k/\mathcal{R}\right) = \dot{\theta}\vec{e}_y \left(\forall k\right)$, $\vec{V}\left(C_k, D_k/\mathcal{R}\right) = \vec{V}\left(C, \Sigma/\mathcal{R}\right) = \dot{x}\vec{e}_x$ car C_1, C_2 et C appartiennent au même solide en translation, il en résulte que :

$$\boxed{\dot{x} = R\dot{\theta}}$$

16. Le théorème de la résultante dynamique appliqué au véhicule Σ dans $\mathcal{R}$ se traduit par :

$$M\vec{a}\left(C, \Sigma/\mathcal{R}\right) = M\vec{g} + \vec{R}_1 + \vec{R}_2$$

En projection suivant $\vec{e}_x$ il vient :

$$\boxed{M\ddot{x} = T_1 + T_2}$$

17. En projection suivant $\vec{e}_z$ on obtient :

$$\boxed{N_1 + N_2 = Mg_0}$$

18. On applique le théorème du moment cinétique barycentrique au véhicule Σ qui se traduit par :

$$\left(\frac{d\vec{L}(C,\Sigma/\mathcal{R}^*)}{dt}\right)_{\mathcal{R}^*} = \overrightarrow{CC} \wedge M\vec{g} + \overrightarrow{CI_1} \wedge \vec{R}_1 + \overrightarrow{CI_2} \wedge \vec{R}_2$$

Or le théorème de Koenig relatif au moment cinétique nous donne :

$$\vec{L}(C,\Sigma/\mathcal{R}^*) = 2\sum_{k=1}^{2}\vec{L}(C_k, D_k/\mathcal{R}^*) = 4I_0\dot{\theta}\vec{e}_y$$

Il en résulte que :

$$4I_0\ddot{\theta} = \frac{a}{2}(N_2 - N_1) - b(T_1 + T_2)$$

Compte tenu de la condition de roulement sans glissement et du résultat de la question 16 on obtient :

$$\boxed{N_2 - N_1 = \frac{a}{2}\left(\frac{4I_0}{R} + bM\right)\ddot{x}}$$

19. Des résultats de 18 et 19 on déduit :

$$\boxed{N_1 = \frac{1}{2}Mg_0 - \frac{1}{a}\left(\frac{4I_0}{R} + bM\right)\ddot{x}}$$

20. Et :

$$\boxed{N_2 = \frac{1}{2}Mg_0 + \frac{1}{a}\left(\frac{4I_0}{R} + bM\right)\ddot{x}}$$

21. Lorsque le véhicule accélère $(\ddot{x} > 0)$ on a $N_2 > N_1$.

Lorsque le mouvement du véhicule est rectiligne et uniforme $(\ddot{x} = 0)$ alors on a $N_1 = N_2 = \frac{1}{2}Mg_0$.

Induction électromagnétique.

***Attention**, pour éviter des confusions dans les notations a représentera le rayon du conducteur cylindrique et R sa résistance.*

22. Les courants (*courants de Foucault*) qui apparaissent dans le cylindre conducteur résultent du phénomène d'induction électromagnétique : circuit fixe dans un champ magnétique variable au cours du temps (*cas de Neumann*).
Tout plan contenant l'axe du cylindre (*axe Oz*) est un plan d'antisymétrie pour l'ensemble conducteur/source de $\vec{B}_e$. Le champ électrique $\vec{E}$ et le courant volumique $\vec{J}$, vecteurs vrais, sont donc dirigés suivant la normale à ces plans c'est-à-dire suivant $\vec{e}_\varphi$

23. Les lignes de courant sont des cercles concentriques centrés sur Oz dans les plans z = Cte. On peut donc intégrer l'équation de Maxwell-Faraday sur la surface plane S qui s'appuie sur une ligne de courant C, soit en utilisant le théorème de Stokes :

$$\iint_S \overrightarrow{\text{rot}}\vec{E}.(dS\vec{e}_z) = \oint_C \vec{E}.(d\ell\vec{e}_\varphi) = -\frac{d}{dt}\iint_S \vec{B}.(dS\vec{e}_z)$$

Il vient :

$$2\pi\rho E_\varphi = -\pi\rho^2 B_e\omega\cos(\omega t)$$

d'où

$$\boxed{\vec{E} = E_\varphi\vec{e}_\varphi = -\frac{1}{2}\rho\omega B_e\cos(\omega t)\vec{e}_\varphi}$$

Remarque. Il est inutile de donner l'expression du rotationnel en coordonnées cylindriques.

24. La puissance volumique instantanée dissipée par effet Joule en un point du conducteur est, compte tenu de la loi d'Ohm locale $\vec{J} = \gamma\vec{E}$:

$$\boxed{\mathcal{P} = \vec{J}.\vec{E} = \gamma E_\varphi^2 = \frac{1}{2}\gamma\rho^2\omega^2 B_e^2 \cos^2(\omega t)}$$

25. La puissance moyenne dissipée par effet Joule dans tout le conducteur est définie par :

$$\mathcal{P}_m = \iiint_V \langle \mathcal{P} \rangle dV$$

avec $\langle \mathcal{P} \rangle = \frac{1}{4}\gamma\rho^2\omega^2 B_e^2$ et $dV = \rho\, d\rho\, d\varphi\, dz$.

Il en résulte que :

$$\boxed{\mathcal{P}_m = \frac{1}{16}\pi\omega^2 L a^4 B_e^2}$$

On observe que cette puissance dissipée est d'autant plus importante que γ et ω sont grands et que le conducteur est massif.

26. Pour $\mathcal{P}_m = 1W$ et $\omega = 1000 rad.s^{-1}$ on obtient :

$$\boxed{B_e = 7{,}1 mT}$$

27. La résistance de ce conducteur est :

$$\boxed{R = \frac{L}{\pi\gamma a^2} = 0{,}32 m\Omega}$$

28. L'intensité du courant électrique qui traverse ce cylindre lorsque ce dernier dissipe une puissance $\mathcal{P}_m = 1W$ est :

$$\boxed{I = \sqrt{\frac{\mathcal{P}_m}{R}} = 1{,}8 A}$$

Diffusion thermique.

29. Une simple analyse dimensionnelle de l'équation aux dérivées partielles montre que u est l'énergie interne volumique en un point du milieu.

30. On a :

$$\frac{\partial u(z,t)}{\partial t} = \rho c_p \frac{\partial T(z,t)}{\partial t}$$

et, d'après la loi de Fourier :

$$\frac{\partial J_u(z,t)}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(-\lambda \frac{\partial T(z,t)}{\partial z}\right) = -\lambda \frac{\partial^2 T(z,t)}{\partial z^2}$$

La température satisfait donc à l'équation suivante :

$$\boxed{\frac{\partial T(z,t)}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho c_p}\frac{\partial^2 T(z,t)}{\partial^2 z}}$$

31. On reporte la solution proposée dans l'équation de diffusion précédente ce qui nous donne :

$$\underline{r}^2 = j\frac{\omega}{k} = \frac{\omega}{k}\exp\left(j\frac{\pi}{2}\right)$$

On en déduit :

$$\boxed{\underline{r} = \pm\sqrt{\frac{\omega}{2k}}(1+j)}$$

32. On retient uniquement la solution qui ne diverge pas lorsque $z \to -\infty$ d'où le profil de température :

$$T(z,t) = T_0 + \Theta_0 \exp\left(\frac{-|z|}{\delta}\right)\cos\left(\omega t - \frac{|z|}{\delta}\right) \quad (\text{car } z < 0)$$

avec T_0 valeur moyenne temporelle de la température, Θ_0 amplitude des variations de température et :

$$\delta = \sqrt{\frac{2k}{\omega}}$$

distance caractéristique d'atténuation des variations de température dans le sol.

Cette solution en régime établi présente les propriétés suivantes :

Džun amortissement exponentiel dont la longueur caractéristique est proportionnelle à la racine carrée de la période ;

Džune "propagation" associé à un déphasage entre la variation sinusoïdale de la température en un point de profondeur z et le sol. Il lui correspond un effet retard $\left(\Delta t = \frac{|z|}{\sqrt{2k\omega}}\right)$ plus faible pour les phénomènes à variations plus rapides dans le temps.

33. Pour des variations annuelles de température supposées sinusoïdales on obtient :

$$\delta = \sqrt{\frac{\lambda T}{\pi \rho c_p}} = 2,2\text{m}$$

34. On suppose qu'au niveau du sol la température subit une variation annuelle $\Delta T_0 = \Delta T(z=0) = 15°\text{C}$; à la profondeur de 10 m cette variation devient :

$$\Delta T_{10} = \Delta T_0 \exp\left(\frac{-|z|}{\delta}\right) = 0,16°\text{C}$$

Champ électromagnétique dans une cavité.

35. La cavité ne contient ni charges électriques ni courants donc les équations de Maxwell s'écrivent :

$$\text{div}\vec{B} = 0 \text{ (Maxwell-Thomson)} \qquad \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \text{ (Maxwell-Faraday)}$$

$$\text{div}\vec{E} = 0 \text{ (Maxwell-Gauss)} \qquad \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \text{ (Maxwell-Ampère)}$$

Ces équations conduisent, pour le champ électrique, à l'équation de propagation :

$$\Delta\vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

En remplaçant dans cette équation le champ électrique proposé dans l'énoncé il vient :

$$\left(\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\pi^2}{L_y^2} - \frac{\pi^2}{L_z^2}\right)\vec{E} = \vec{0}$$

Cette relation doit être vérifiée pour tout y, tout z et quel que soit t ce qui implique :

$$\omega = \pi c \sqrt{\frac{1}{L_y^2} + \frac{1}{L_z^2}}$$

car on doit avoir $\omega > 0$.

36. On détermine le champ magnétique à l'aide de l'équation de Maxwell-Faraday. En l'absence de tout champ statique on obtient :

$$\vec{B} = \begin{cases} B_x = 0 \\ B_y = \dfrac{\pi E_0}{\omega L_z} \sin\left(\dfrac{\pi y}{L_y}\right)\cos\left(\dfrac{\pi z}{L_z}\right)\cos(\omega t) \\ B_z = \dfrac{-\pi E_0}{\omega L_y} \cos\left(\dfrac{\pi y}{L_y}\right)\sin\left(\dfrac{\pi z}{L_z}\right)\cos(\omega t) \end{cases}$$

37. L'énergie électrique instantanée contenue dans la cavité est définie par $\mathcal{E}_e = \iiint_V \frac{\varepsilon_0}{2} E^2 dV$ ce qui nous donne :

$$\boxed{\mathcal{E}_e = \frac{\varepsilon_0}{8} E_0^2 L_x L_y L_z \sin^2(\omega t)}$$

38. L'énergie magnétique instantanée contenue dans la cavité est $\mathcal{E}_m = \iiint_V \frac{B^2}{2\mu_0} dV = \iiint_V \frac{\varepsilon_0 c^2}{2} B^2 dV$ ce qui nous donne, compte tenu du résultat de la question 35 :

$$\boxed{\mathcal{E}_m = \frac{\varepsilon_0}{8} E_0^2 L_x L_y L_z \cos^2(\omega t)}$$

39. On en déduit l'énergie électromagnétique contenue dans la cavité :

$$\boxed{\mathcal{E}_{em} = \mathcal{E}_e + \mathcal{E}_m = \frac{\varepsilon_0}{8} E_0^2 L_x L_y L_z = \frac{\varepsilon_0}{8} E_0^2 V}$$

40. Dans un conducteur parfait le champ électrique est nul. La discontinuité du champ électrique, uniquement normal au niveau du plan x = 0, se traduit par :

$$\vec{E}(0^+) - \vec{E}(0^-) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{e}_x$$

On en déduit la densité superficielle de charge sur ce plan :

$$\sigma = \varepsilon_0 E_0 \sin\left(\frac{\pi y}{L_y}\right) \sin\left(\frac{\pi z}{L_z}\right) \sin(\omega t)$$

D'où la charge électrique portée par ce même plan :

$$\boxed{Q = \iint_S \sigma . dS = \frac{4\varepsilon_0}{\pi^2} L_y L_z E_0 \sin(\omega t)}$$

-:-:-:-:-