ICNA - SESSION 2011
ÉPREUVE OPTIONNELLE DE PHYSIQUE
CORRIGÉ

Réfractomètre interférentiel de Rayleigh.

1. On est en présence du montage interférentiel des fentes d'Young. Dans le plan focal image de la lentille mince convergente L_2 on observe – à l'aide d'un oculaire - des franges d'interférence qui sont des segments de droite parallèles aux fentes. La frange centrale située en O correspond à la frange d'ordre zéro (*égalité des chemins optiques* (SC_1O) *et* (SC_2O)) : c'est une ***frange brillante***.

2. L'ordre d'interférence en un point P, d'abscisse x, du plan focal image de L_2 est :

$$p(x) = \frac{\delta(x)}{\lambda_0} = \frac{ax}{\lambda_0 f'_2}$$

L'interfrange i, distance entre deux points homologues voisins, est tel que $p(x+i) - p(x) = 1$; on en déduit :

$$\boxed{i = \frac{\lambda_0 f'_2}{a}}$$

3. L'œil normal – c'est-à-dire emmétrope – n'accommode pas lorsqu'il observe un objet à l'infini. Le plan focal image de L_2 est alors confondu avec le plan focal objet de l'oculaire L_3 : l'ensemble forme un système afocal. L'œil va donc observer un interfrange (*c'est un nom masculin*) sous un angle θ tel que :

$$\tan\theta = \frac{i}{f'_3} = \frac{\lambda_0 f'_2}{af'_3}$$

soit :

$$\boxed{\theta = \arctan\left(\frac{i}{f'_3}\right) = \arctan\left(\frac{\lambda_0 f'_2}{af'_3}\right)}$$

4. On vide l'air contenu dans la cuve C_1 ; la différence de marche en P devient alors :

$$\delta'(x) = (SC_2P) - (SC_1P) = \frac{ax}{f'_2} + (n-1)L$$

La frange d'ordre zéro, qui se trouvait initialement en x = 0, est maintenant située à l'abscisse :

$$x_0 = -\frac{(n-1)Lf'_2}{a} = -pi = -p\frac{\lambda_0 f'_2}{a} \quad (p > 0)$$

Le déphasage entre les rayons qui interfèrent au point P est alors :

$$\boxed{\varphi(x) = 2\pi\frac{\delta'(x)}{\lambda_0} = 2\pi\frac{ax}{\lambda_0 f'_2} + 2\pi p}$$

5. La différence de marche en x = 0 est maintenant :

$$\boxed{\delta'(0) = (n-1)L = p\lambda_0}$$

6. On en déduit l'expression de l'indice de l'air :

$$\boxed{n = 1 + p\frac{\lambda_0}{L}}$$

7. Numériquement on obtient :

$$\boxed{n \approx 1{,}0003}$$

Filtre actif.

On est en présence d'un filtre actif d'ordre deux à structure de ***Rauch***.
L'AO est supposé idéal et fonctionne en régime linéaire donc $i_+ = i_- = 0$ et $v_+ = v_-$.
L'entrée non inverseuse E_+ est reliée à la masse donc $\underline{v}_+ = 0$.
On applique le théorème de Millman
♦ en A (*point commun aux deux résistances* R *et aux impédances* $\underline{Z}_1$ et $\underline{Z}_2$) :

$$\left(\frac{2}{R}+\frac{1}{\underline{Z}_1}+\frac{1}{\underline{Z}_2}\right)\underline{v}_A = \frac{\underline{u}_e}{R}+\frac{\underline{u}_s}{\underline{Z}_2}$$

♦ à l'entrée inverseuse E_- :

$$\underline{v}_- = \frac{\underline{u}_s}{2R}+\frac{\underline{v}_A}{\underline{Z}_1} = \underline{v}_+ = 0$$

De ces deux relations on déduit la fonction de transfert harmonique :

$$\underline{H} = \frac{\underline{u}_s}{\underline{u}_e} = \frac{-2}{1+2\left(\frac{\underline{Z}_1}{R}+\frac{\underline{Z}_1}{2\underline{Z}_2}+\frac{R}{\underline{Z}_2}\right)}$$

8. On suppose que $\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2 = R$. Le facteur d'amplification en tension est alors :

$$\underline{A}_u = \frac{\underline{u}_s}{\underline{u}_e} = -\frac{1}{3}$$

9. L'intensité du courant d'entrée est :

$$\underline{i}_e = \frac{1}{R}\left(\underline{u}_e - \underline{v}_A\right) = \frac{1}{R}\left(\underline{u}_e + \frac{\underline{u}_s}{2}\right) = \frac{1}{R}\left(1+\frac{\underline{A}_u}{2}\right)\underline{u}_e$$

soit :

$$\underline{i}_e = \frac{5}{6}\frac{\underline{u}_e}{R}$$

10. L'impédance d'entrée du filtre est alors :

$$\underline{Z}_e = \frac{\underline{u}_e}{\underline{i}_i} = \frac{6R}{5} = R_e = 60\text{k}\Omega$$

C'est une résistance.

11. Maintenant nous avons $\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2 = \frac{1}{jC\omega}$. On en déduit la fonction de transfert harmonique du filtre :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{-1}{1+j\left(CR\omega - \frac{1}{CR\omega}\right)}$$

On observe que :

♦ $\lim\limits_{\omega\to+\infty} |\underline{H}| = \lim\limits_{\omega\to0^+} |\underline{H}| = 0$

♦ $|\underline{H}|$ passe par un maximum, qui vaut $|\underline{H}|_{max} = 1$, pour $\omega = \omega_0 = \frac{1}{RC}$

On est donc en présence d'un filtre passe-bande dont la fréquence de résonance est :

$$f_0 = \frac{1}{2\pi RC} \approx 16\text{Hz}$$

12. Les fréquences limites de la bande passante à -3dB sont les valeurs de f telles que :

$$|\underline{H}(jf)| = \frac{|\underline{H}|_{max}}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{f}{f_0}-\frac{f_0}{f}\right)^2}}$$

soit :

$$f^2 \mp f_0 f - f_0^2 = 0$$

Les solutions physiquement admissibles sont :

$$f_1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2} f_0 \quad , \quad f_2 = \frac{\sqrt{5}+1}{2} f_0$$

Il en résulte une bande passante $\Delta f = f_2 - f_1 = f_0$ d'où le facteur de qualité du filtre :

$$\boxed{Q = \frac{f_0}{\Delta f} = 1}$$

Remarque. La fonction de transfert d'un tel filtre admet la forme canonique :

$$\underline{H}(x) = \frac{-H_0}{1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)}$$

avec $x = \frac{\omega}{\omega_0}$, ce qui nous donne par identification $Q = 1$.

13. Pour $\omega = \omega_0$ le facteur d'amplification en tension du système est :

$$\boxed{\underline{A}'_u = \underline{H}(j\omega_0) = -1}$$

14. En régime stationnaire une bobine idéale est équivalente à un interrupteur fermé ; l'AO est alors monté en suiveur avec $v_A = v_+ = v_- = v_s = 0$. La résistance d'entrée du circuit est :

$$\boxed{R'_e = \frac{u_e}{i_e} = R\frac{u_e}{u_e - v_-} = R}$$

Remarque. Un tel montage ne présente alors aucun intérêt ; il en est de même de la question posée.

Mouvement d'un solide.

***Attention**, le moment d'inertie* $I = \frac{2}{5} mR^2$ *est celui d'une sphère – et non pas d'un disque - par rapport à un axe passant par son centre.*

15. On note $\mathcal{R}$ le référentiel du laboratoire supposé galiléen, S le solide qui est une sphère. On applique le théorème de la résultante dynamique à S dans $\mathcal{R}$, soit :

$$m\left(\frac{d\vec{v}(C,S/\mathcal{R})}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = m\vec{g} + \vec{N}$$

Le contact entre S et la piste OA est dépourvu de frottement, il en résulte que :

$$\boxed{\vec{v}(C,S/\mathcal{R}).\vec{e}_x = Cte}$$

Le mouvement de S sur la piste OA est une translation uniforme.

Remarque. Le point O' est atteint avec la vitesse v_0.

16. Le solide S roule sans glisser sur la piste O'B ce qui se traduit par :

$$\vec{v}(J,S/\mathcal{R}) = \vec{v}(C,S/\mathcal{R}) + \vec{\omega}(S/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{CJ} = \vec{0}$$

où J est le point de contact entre S et O'B.

Sachant que $\vec{\omega}(S/\mathcal{R}) = \omega\vec{e}_y$, $\vec{v}(C,S/\mathcal{R}) = v\vec{e}\,'_x$ il en résulte que :

$$v = R\omega$$

L'énergie cinétique du solide est donnée par le théorème de Koenig :

$$\mathcal{E}_k(S/\mathcal{R}) = \frac{1}{2} m\vec{v}^2(C,S/\mathcal{R}) + \frac{1}{2} I\vec{\omega}^2(S/\mathcal{R})$$

Compte tenu de la condition de roulement sans glissement on obtient :

$$\boxed{\mathcal{E}_k(S/\mathcal{R}) = \frac{7}{10}mv^2}$$

17. Le théorème de l'énergie cinétique appliqué à S entre O' et B se traduit par :

$$\frac{7}{10}m\left(v_B^2 - v_0^2\right) = -mg_0h = -mg_0L\sin\alpha$$

D'où l'expression de la vitesse en B :

$$v_B^2 = v_0^2 - \frac{10}{7}g_0L\sin\alpha$$

Pour que le point B soit effectivement atteint il faut que cette vitesse existe ce qui impose, avec $\sin\alpha = \frac{1}{2}$:

$$\boxed{v_0 > v_{0,m} = \sqrt{\frac{10}{7}g_0L\sin\alpha} = \sqrt{\frac{5}{7}g_0L}}$$

18. On applique le théorème de la puissance cinétique S dans $\mathcal{R}$:

$$\frac{d\mathcal{E}_k(S/\mathcal{R})}{dt} = \mathcal{P}_{ext}$$

Comme S roule sans glisser sur le plan incliné, la puissance des forces extérieures se réduit à celle du poids du solide, soit $\mathcal{P}_{ext} = -mg_0v\sin\alpha$.

Par ailleurs $\frac{d\mathcal{E}_k(S/\mathcal{R})}{dt} = \frac{7}{5}mv\frac{dv}{dt} = \frac{7}{5}mva$.

L'accélération du centre d'inertie du solide du solide est donc :

$$\boxed{a = -\frac{5}{7}g_0\sin\alpha = -\frac{5}{14}g_0}$$

19. Le théorème de la résultante dynamique appliqué à S dans $\mathcal{R}$ donne respectivement en projection selon $\vec{e}'_x$ et $\vec{e}'_z$:

$$ma = T - mg_0\sin\alpha \Rightarrow T = ma + mg_0\sin\alpha = \frac{2}{7}mg_0\sin\alpha \quad , \quad 0 = N - mg_0\cos\alpha \Rightarrow N = mg_0\sin\alpha$$

On en déduit le rapport :

$$\boxed{\frac{T}{N} = \frac{2}{7}\tan\alpha = \frac{2\sqrt{3}}{21}}$$

20. De $a = \frac{dv}{dt}$, on déduit par intégration par rapport au temps , $v = v_0 + at$. Le solide atteint donc le point B où il va décoller, car on suppose $v_0 > v_{0,m}$, à l'instant t_d :

$$\boxed{t_d = \frac{v_B - v_0}{a} = \frac{\sqrt{v_0^2 + 2aL} - v_0}{a} = -\frac{v_0}{a} + \sqrt{\frac{v_0^2}{a^2} + \frac{2L}{a}}}$$

21. Lors de son décollage la vitesse du centre d'inertie de S est :

$$\boxed{v_d = v_B = \sqrt{v_0^2 - \frac{10}{7}g_0L\sin\alpha} = \sqrt{v_0^2 + 2aL}}$$

Moteur thermique à air.

L'air est assimilé à un gaz parfait.

22. La transformation $E_1 \to E_2$ est une compression isotherme donc, d'après la loi de Mariotte, on a $p_1V_1 = p_2V_2$. On en déduit, compte tenu de l'équation d'état d'un gaz parfait $pV = \frac{m}{M}RT$, le volume V_2 dans l'état E_2 :

$$\boxed{V_2 = \frac{p_1}{p_2} V_1 = \frac{p_1}{p_2} \frac{m}{M} \frac{RT_1}{p_1} = 2{,}5\,\mathrm{L}}$$

23. La transformation $E_2 \to E_3$ est un échauffement isobare donc $\frac{V}{T} = \mathrm{Cte}$. Le volume d'air dans l'état E_3 est alors, compte tenu que $T_2 = T_1$:

$$\boxed{V_3 = V_2 \frac{T_3}{T_2} = V_2 \frac{T_3}{T_1} = 10\,\mathrm{L}}$$

24. La transformation $E_3 \to E_4$ est une détente adiabatique et réversible donc isentropique ; on peut utiliser la formule de Laplace $pV^\gamma = \mathrm{Cte}$. Ainsi, compte tenu que $p_4 = p_1$ et $p_3 = p_2$, le volume d'air dans l'état E_4 est :

$$\boxed{V_4 = V_3 \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \approx 36\,\mathrm{L}}$$

25. La transformation $E_3 \to E_4$ est isentropique donc, d'après le premier principe de la thermodynamique, le travail reçu par le fluide est $W_{34} = \Delta U_{34}$. Or un gaz parfait suit la première loi de Joule ce qui nous conduit à :

$$\boxed{W_{34} = \Delta U_{34} = \frac{nR}{\gamma - 1}(T_4 - T_3) = \frac{p_4 V_4 - p_3 V_3}{\gamma - 1}}$$

On a $W_{34} < 0$ car $T_4 = \frac{M p_1 V_4}{mR} \approx 838\mathrm{K} < T_3 = 1400\mathrm{K}$.

26. Au cours d'un cycle le fluide reçoit un travail :

$$W = W_{12} + W_{23} + W_{34} + W_{41}$$

avec :

- $W_{12} = -\int_{E_1}^{E_2} p.dV = p_1 V_1 \int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{p} = p_1 V_1 \ln\left(\frac{p_2}{p_1} \right)$ travail reçu au cours de la compression isotherme
- $W_{23} = -p_2 (V_3 - V_2)$ et $W_{41} = -p_1 (V_1 - V_4)$ travaux reçus par le fluide au cours des échauffement et du refroidissement isobares

En définitive on obtient :

$$\boxed{W = W_{34} + p_1 V_1 \ln\left(\frac{p_2}{p_1} \right) - p_2 (V_3 - V_2) - p_1 (V_1 - V_4)}$$

Ce travail, que l'on peut mettre sous la forme compacte $W = nR\left(\frac{\gamma}{\gamma - 1}(T_4 - T_3) + T_1 \ln\left(\frac{p_2}{p_1} \right) \right)$, est ***négatif***.

27. Au cours de l'échauffement isobare le fluide reçoit, de la source chaude, une quantité de chaleur $Q_{23} = \Delta H_{23}$. Comme un gaz parfait suit la deuxième loi de Joule il vient :

$$\boxed{Q_{23} = \Delta H_{23} = \frac{nR\gamma}{\gamma - 1}(T_3 - T_2) = \frac{mR\gamma}{M(\gamma - 1)}(T_3 - T_2) > 0}$$

Remarque. Pour les autres phases on a $Q_{12} < 0$, $Q_{34} = 0$ et $Q_{41} < 0$.

28. Le rendement de ce moteur est défini par :

$$\boxed{\eta = -\frac{W}{Q_{23}}}$$

Induction électromagnétique.

29. On est en présence d'un circuit rigide mobile dans un champ magnétique constant et uniforme (cas de Lorentz). Dans cette situation le flux coupé et égal à la variation de flux à travers le circuit soit, puisque l'immersion du circuit dans le champ magnétique n'est que partielle :

$$\delta\phi_c = d\phi = na\dot{x}B_0\,dt$$

La loi de Faraday nous conduit alors à une force électromotrice induite :

$$e = -\frac{d\phi}{dt} = -naB_0\dot{x}$$

Remarque. On peut aussi utiliser le champ électromoteur de Lorentz, $\vec{E}_m = \vec{v} \wedge \vec{B}$, et calculer sa circulation le long du circuit.

30. Le cadre n'est pas complètement plongé dans le champ magnétique. La résultante des forces de Laplace qui s'exerce sur la partie immergée dans le champ est alors définie par :

$$\vec{F}_L = n\left(\int_{MN} i d\vec{\ell} \wedge \vec{B} + \int_{NN'} i d\vec{\ell} \wedge \vec{B} + \int_{M'M} i d\vec{\ell} \wedge \vec{B}\right)$$

où M'M et NN' sont les parties verticales d'une spire soumises au champ magnétique.

Les sens du courant dans M'M et NN' sont opposés ce qui implique $\int_{NN'} i d\vec{\ell} \wedge \vec{B} = -\int_{M'M} i d\vec{\ell} \wedge \vec{B}$.

En définitive nous avons :

$$\vec{F}_L = n\int_y^{y+a} \left(i\,dy\vec{e}_y\right) \wedge \left(B_0\vec{e}_z\right) = naiB_0\vec{e}_x$$

31. Le théorème de la résultante dynamique appliqué au cadre dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen nous donne, en projection suivant $\vec{e}_x$, l'équation mécanique du système :

$$m\frac{dv_x}{dt} = naB_0 i + mg \quad \text{(EM)}$$

La loi d'Ohm nous conduit à l'équation électrique :

$$L\frac{di}{dt} + Ri = -naB_0 v_x \quad \text{(EE)}$$

On tire l'intensité i de l'équation mécanique et l'on reporte son expression dans l'équation électrique. On obtient l'équation différentielle à laquelle obéit la vitesse de translation du cadre :

$$\frac{d^2v_x}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dv_x}{dt} + \frac{\left(naB_0\right)^2}{mL}v_x = \frac{R}{L}g$$

Par identification avec l'équation différentielle proposée il vient :

$$\tau = \frac{L}{R} = 1\text{ms}$$

32. De même on obtient :

$$\omega_0 = \frac{naB_0}{\sqrt{mL}}$$

33. Si on néglige l'inductance propre du circuit l'équation électrique se réduit à :

$$Ri = -naB_0 v_x \quad \text{(EE')}$$

En reportant l'expression de l'intensité i du courant dans l'équation mécanique (EM) on obtient la nouvelle équation différentielle du mouvement du cadre :

$$\frac{dv_x}{dt} + \frac{\left(naB_0\right)^2}{mR}v_x = g$$

Que l'on peut mettre sous la forme proposée dans l'énoncé si on pose :

$$\tau' = \frac{mR}{\left(naB_0\right)^2}$$

34. Lorsque la vitesse limite est atteinte l'accélération s'annule ; ainsi, de l'équation différentielle obtenue à la question précédente, on déduit :

$$\boxed{v_\ell = \frac{mRg}{(naB_0)^2} = 0{,}8\,\mathrm{m.s^{-1}}}$$

Vidange d'un réservoir.

35. La relation fondamentale de la statique des fluides dans le référentiel terrestre supposé galiléen, $\rho_m \vec{g} - \overrightarrow{\mathrm{grad}}p = \vec{0}$, nous montre que les surfaces isobares – perpendiculaires à $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,p$ - sont les plans orthogonaux à $\vec{g}$. On a donc $p = p(z)$ ce qui nous conduit en projection selon l'axe Oz à :

$$\frac{dp(z)}{dz} = -\rho_m g_0$$

Compte tenu de la continuité de la pression à l'interface air/eau, soit $p(h) = p_0$, la relation précédente s'intègre en :

$$p(z) = p_0 + \rho_m g_0 (h - z)$$

On observe ainsi que :
♦ la pression dans le liquide est indépendante de la forme du réservoir qui le contient ;
♦ la pression au fond du réservoir, c'est-à-dire pour z = 0, est supérieure à la pression atmosphérique ;
♦ la pression augmente de 10^3 Pa, soit environ 10^{-2} atm , lorsque la profondeur varie de 10 cm.

36. On suppose l'écoulement quasi stationnaire ce qui nous permet d'appliquer le théorème de Bernoulli le long de la ligne de courant qui relie un point de la surface libre du liquide avec le point O centre de la bonde. Il vient :

$$\frac{p_0}{\rho_m} + \frac{1}{2}\left(\frac{dh(t)}{dt}\right)^2 + g_0 h(t) = \frac{p_0}{\rho_m} + \frac{v^2(t)}{2}$$

Par ailleurs, l'eau étant considérée comme un fluide incompressible, la conservation du débit volumique se traduit par :

$$\pi a^2 v(t) = -\pi R^2 \frac{dh(t)}{dt}$$

De ces deux relations on déduit la vitesse du fluide en O :

$$\boxed{v(t) = \sqrt{\frac{2g_0 h(t)}{1-(a/R)^4}}}$$

37. On suppose que $a \ll R$ ce qui nous permet de retrouver le théorème de Torricceli, $v(t) \approx \sqrt{2g_0 h(t)}$. La conservation du débit volumique nous conduit alors à l'équation différentielle :

$$\boxed{\frac{dh(t)}{dt} + \sqrt{2g_0}\,\frac{a^2}{R^2}\sqrt{h(t)} = 0}$$

38. La durée de vidange du réservoir est $\tau_v = -\frac{R^2}{\sqrt{2g_0}\,a^2}\int_{h_0}^{0}\frac{dh(t)}{\sqrt{h(t)}}$, soit :

$$\boxed{\tau_v = \frac{R^2}{a^2}\sqrt{\frac{2h_0}{g_0}} = 500\,\mathrm{s}}$$

39. ***Attention**, ce n'est pas la hauteur de liquide qui est proportionnelle au temps mais la différence des hauteurs* $h_0 - h(t) = Vt$. *Ce vase constitue une **clepsydre** c'est-à-dire une horloge à eau.*

Dans cette nouvelle géométrie, compte tenu que $\rho \gg a$, la conservation du débit volumique se traduit par :

$$\pi a^2\sqrt{2g_0h(t)} = -\pi\rho^2\frac{dh(t)}{dt}$$

soit encore :

$$\pi a^2\sqrt{2g_0h(t)} = -\pi k'^2\sqrt{h(t)}\frac{dh(t)}{dt}$$

On en déduit :

$$\boxed{\frac{dh(t)}{dt} = -\frac{\sqrt{2g_0}\,a^2}{k'^2} = -V}$$

40. La durée de vidange de ce réservoir est $\tau' = \dfrac{k'^2 h_0}{\sqrt{2g_0}\,a}$. On souhaite que $\tau' = 250\text{s}$ ce qui impose :

$$\boxed{k' = \sqrt{\frac{\sqrt{2g_0}\,\tau'}{h_0}a} \approx 0,2\text{m}^{3/4}}$$

-:-:-:-:-